

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. STREEFKERK, P. WIJDENES,
Dr H. A. GRIBNAU VOOR WIMECOS EN J. WILLEMSE VOOR
LIWENAGEL

MET MEDEWERKING VAN

DR. H. J. E. BETH, AMERSFOORT - PROF. DR. E. W. BETH, AMSTERDAM
DR. R. BALLIEU, LEUVEN - DR. G. BOSTEELS, HASSELT
PROF. DR. O. BOTTEMA, RIJSWIJK - DR. L. N. H. BUNT, UTRECHT
DR. E. J. DIJKSTERHUIS, OISTERWIJK - PROF. DR. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN
DR. H. A. GRIBNAU, RÓOSENDAAL - DR. B. P. HAALMEIJER, BARNEVELD
DR. R. MINNE, LUIK - PROF. DR. J. POPKEN, UTRECHT
DR. O. VAN DE PUTTE, RONSE - PROF. DR. D. J. VAN ROOY, POTCHEFSTROOM
DR. H. STEFFENS, MECHELEN - IR. J. J. TEKELBURG, ROTTERDAM
DR. W. P. THIJSSEN, HILVERSUM - DR. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM

25e JAARGANG 1949/50

Nr 6

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijks afleveringen. Prijs per jaargang f 8,00. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde (f 8,00) zijn ingetekend, betalen f 6,75.

De leden van **Liwenagel** (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van **Wimecos** (Vereniging van Leraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hogere Burgerscholen en Lycea) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van f 2,50 op de postgirorekening no. 59172 van Dr. H. Ph. Baudet te 's-Gravenhage. De leden van de Wimecos storten hun contributie voor het verenigingsjaar van 1 September 1949 t/m 31 Augustus 1950 (waarin de abonnementskosten op Euclides begrepen zijn) ten bedrage van f 4,50 op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. Voor 1 September 1950—1 September 1951 is de contributie vastgesteld op f 5,50. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593 van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen f 6,75 per jaar franco per post.

Artikelen ter opneming te zenden aan Dr H. Streefkerk, Hilversum, Van Lenneplaan 16, Tel. K 2950; 5558.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstr. 88; Tel. K 2900; 27119.

I N H O U D.

	Blz.
Prof. Dr. A. HEYTING, Spanningen in de Wiskunde (Vervolg van blz. 236)	301
Dr. J. KOKSMA, Rondom het functiebegrip	313
KORREL C. Dr. H. J. E. BETH, De omkering van de stelling van König en van die van het impulsmoment	340
P. VISSER, Op de ribben van een gelijkzijdige drievlakshoek S de punten P, Q en R zodanig te bepalen, dat $\triangle PQR$ gelijkzijdig is	343
Dr. H. STREEFKERK, Over de behandeling van de exponentiële en de logaritmische functie op H.B.S. en Gymnasium	346
Dr. H. STREEFKERK, Overpeinzingen naar aanleiding van de enquête van Dr. L. N. H. Bunt	351
De zomerconferentie voor wiskunde georganiseerd door het Ministerie van Onderwijs	356
Boekbespreking	357
A. J. VAN DER LOO, Academische opleiding voor actuaris	360
Inhoud van de 25e jaargang	363

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. STREEFKERK, P. WIJDENES,
Dr H. A. GRIBNAU VOOR WIMECOS EN J. WILLEMSE VOOR
LIWENAGEL

MET MEDEWERKING VAN

DR. H. J. E. BETH, AMERSFOORT - PROF. DR. E. W. BETH, AMSTERDAM
DR. R. BALLIEU, LEUVEN - DR. G. BOSTEELS, HASSELT
PROF. DR. O. BOTTEMA, RIJSWIJK - DR. L. N. H. BUNT, UTRECHT
DR. E. J. DIJKSTERHUIS, OISTERWIJK - PROF. DR. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN
DR. H. A. GRIBNAU, ROOSENDAAL - DR. B. P. HAALMEIJER, BARNEVELD
DR. R. MINNE, LUIK - PROF. DR. J. POPKEN, UTRECHT
DR. O. VAN DE PUTTE, RONSE - PROF. DR. D. J. VAN ROOY, POTCHEFSTROOM
DR. H. STEFFENS, MECHELEN - IR. J. J. TEKELENBURG, ROTTERDAM
DR. W. P. THIJSSEN, HILVERSUM - DR. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM

25e JAARGANG 1949/50

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

— In de hoogste mate, zei hij. — Dan is het hoognodig, voor te schrijven, dat in Uw modelstaat niemand zich op welke wijze ook aan de beoefening der meetkunde onttrekke; bovendien heeft zij een niet gering bijkomstig nut. — Welk? vroeg hij. — Waarvan gij al gesproken hebt, wat de oorlog betreft en verder om alle vakken beter te kunnen leren. Wij weten toch, dat iemand, die aan meetkunde heeft gedaan hierin geheel en al verschilt van iemand die dat heeft verzuimd. — Bij Zeus, geheel en al, zei hij.”¹⁾

Plato roert hier een tweede kenmerk van de wiskunde aan: haar algemene toepasbaarheid. Even vroeger heeft hij iets dergelijks over de rekenkunde gezegd:

„Dat gemeenschappelijke, dat bij alle kundigheden, bij elk nadenken en in iedere wetenschap gebruikt wordt en dat dan ook iedereen in de eerste plaats moet leren. — Wat is dat? zei hij. — Doodeenvoudig, een, twee, drie uit elkaar te houden; ik bedoel in hoofdzaak het tellen en rekenen. Of geldt daarvoor niet, dat iedere kundigheid en iedere wetenschap het noodzakelijk toepast?”²⁾

Aan het einde van het zesde boek komt een andere gedachte om de hoek kijken:

„Ik denk, dat ge wel weet, dat zij die zich met meetkundige en rekenkundige kwesties bezighouden, uitgaan van onderstellingen over even en oneven, over figuren, over de drie soorten hoeken en over andere dergelijke dingen al naar het onderzoek; dat zij doen alsof zij dat weten, er grondstellingen van maken en noch zichzelf noch anderen er meer rekenschap van willen geven, alsof het iedereen duidelijk was, en dat zij daarop voortbouwend het overige nu uitvoerig behandelen en eenstemmig het inzicht bereiken, waarnaar zij streefden.”³⁾

Men kan hierin een aanwijzing zien, dat Plato ook een der belangrijkste kenmerken van de wiskundige methode kende, namelijk haar deductief karakter, hetgeen hierin bestaat, dat zij, uitgaande van hetgeen als bekend aangenomen wordt, door redering daaruit nieuwe resultaten afleidt. In ieder geval geeft Aristoteles een uitvoerige behandeling van het begrip der deductieve wetenschap.

De grote Griekse denkers kenden dus de voornaamste kenmerken van de moderne wiskunde: zij is universeel toepasbaar, abstract in de zin van gericht van het concrete af en deductief in haar methode. In aansluiting bij Aristoteles en Euclides is in de

¹⁾ Plato, Staat 527 A—C.

²⁾ Plato, Staat 522 C.

³⁾ Plato, Staat 510 C.

nieuwere tijd de meeste nadruk op het deductieve karakter gevallen. Er schijnt een rechte lijn te lopen van de Elementen van Euclides naar de axiomastelsels van Pasch en Hilbert. Inderdaad is er in het gebruik van de deductieve methode zelf wel sprake van volmaking en verscherping, het karakter van de methode bleef hetzelfde. Het meest veranderd zijn de opvattingen over de aard van de uitgangsstellingen. Voor Pasch is de meetkunde een deel van de natuurwetenschap. Hij drukt zijn doelstelling kort en bondig als volgt uit: „De onbestrijdbaarheid van de bewijzen, waardoor de stellingen uit de grondstellingen afgeleid worden, tezamen met de evidentie van de grondstellingen zelf, welke door de eenvoudigste ervaringen gewaarborgd moeten zijn, geeft aan de wiskunde het karakter van de hoogste betrouwbaarheid, dat men haar pleegt toe te schrijven.”¹⁾ Ook Hilbert is van mening, dat de opstelling van de axioma's der meetkunde en het onderzoek naar hun samenhang neerkomt op de logische analyse van onze ruimteaanschouwing²⁾. Maar hij begint zijn opbouw met de bekende woorden: „Wij denken ons drie verschillende systemen van dingen: de dingen van het eerste systeem noemen wij punten . . . ; de dingen van het tweede systeem noemen wij rechten . . . ; de dingen van het derde systeem noemen wij vlakken . . . ; . . .”³⁾ Het blijkt, dat deze „dingen” in het geheel niet de punten, rechten en vlakken uit de aanschouwing behoeven te zijn. Hilbert bouwt herhaaldelijk arithmetische meetkunde-modellen op en past daarop zijn methode onveranderd toe.

Tussen de standpunten van Pasch en Hilbert blijkt dus een vrij groot verschil te bestaan. Ongetwijfeld heeft Hilbert sterker de invloed ondergaan van de ontwikkeling van de wiskunde in de 19e eeuw, in het bijzonder van het doordringen van de niet-euclidische meetkunde. Dat deze, mits zij niet te veel van de euclidische meetkunde afwijkt, niet met de ervaring in strijd is, was reeds aan Gauss duidelijk. Lobatsjefski was dicht bij een bewijs van niet-contradictoriteit. Beltrami, Cayley, Klein en Poincaré bewezen langs verschillende wegen, dat, als de niet-euclidische meetkunde tegenstrijdig was, hetzelfde voor de euclidische meetkunde zou gelden⁴⁾. Door de arithmetisatie van de meetkunde, die eveneens in de 19e eeuw haar beslag kreeg, werd op de grondslag der

¹⁾ M. Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie. Leipzig—Berlin 1882. § 12.

²⁾ D. Hilbert. Grundlagen der Geometrie. Einleitung.

³⁾ ibidem § 1.

⁴⁾ Zie voor de geschiedenis der niet-euclidische meetkunde: H. J. E. Beth, Inleiding in de niet-euclidische meetkunde op historischen grondslag. Groningen 1929.

rekenkunde het bewijs voor de niet-tegenstrijdigheid, dat voor alle drie de meetkunden tegelijk gold, geleverd. Het is duidelijk, dat hierdoor de vragen naar het object van de meetkunde en naar de betekenis van de grondstellingen opnieuw gesteld moesten worden. De conclusie, dat slechts één meetkunde waar kon zijn en de beide andere als onjuist verworpen moesten worden, was moeilijk aanvaardbaar, maar onvermijdelijk, als men de grondstellingen opvat als evidente waarheden over de werkelijkheid. Niet veel aangenamer wordt de positie van de wiskundigen, wanneer zij, zoals Pasch deed, de grondstellingen als door zeer uitgebreide ervaringen gewaarborgd beschouwen. Als een zwaard van Damocles blijft de mogelijkheid hen bedreigen, dat een physicus bij zeer nauwkeurige meting van de hoeken van een grote driehoek een andere som dan 180° vindt; iedere verbetering van de meetmethoden doet het gevaar opnieuw ontstaan, dat zo de euclidische meetkunde fout zou blijken en het werk van 20 of meer eeuwen waardeloos zou worden.

De vraag naar de fundering der grondstellingen drong zich dus op. Het bleek, dat de axiomatische methode geen autonome grondslag voor de wiskunde kan geven; wanneer de grondstellingen iets over de werkelijkheid zeggen, hebben zij een fundering nodig; doen zij dat niet, dan eist de consequentie, dat men ze zuiver formeel opvat en zo tot het formalisme komt. Hilberts standpunt in de „Grundlagen der Geometrie” staat tussen het empiristische en het formalistische in. Zijn drie soorten van „dingen” zijn niet erg begrijpelijk. Hij zegt als het ware: „Wij weten niet, of er iets bestaat, dat aan de axioma's voldoet, maar wij doen alsof.” Anders gezegd, hij spreekt stellingen uit en formuleert bewijzen volgens dezelfde regels, die voor werkelijk bestaande dingen gelden. Maar de toepassing van die regels is in zijn geval zuiver conventioneel, en met dit inzicht zijn wij reeds bij het formalisme beland. Hilbert is dan ook vrij spoedig tot een formalistisch standpunt gekomen.

Reeds eerder was een formalistische opbouw van de wiskunde op andere grondslag beproefd door Frege. Hij ging uit van een geformaliseerde logica en definieerde de wiskundige begrippen op zuiver logische wijze. Doordat hij aldus de wiskunde tot een onderdeel van de logica maakte, werd de universele toepasbaarheid, die voor de logica algemeen werd aanvaard, begrijpelijker. Juist toen Frege zijn hoofdwerk, de „Grundgesetze der Arithmetik” voltooid had, in 1903, ontdekte Russell, dat het logische systeem, dat Frege ten grondslag legde, in zichzelf tegenstrijdig was. Frege deelt het zelf in een naschrift bij zijn boek mee. „Een wetenschappelijk auteur kan nauwelijks iets onaangenams overkomen, dan dat

na de voltooiing van een verhandeling een van de grondslagen van zijn bouwwerk ondermijnd wordt. In deze positie werd ik door een brief van de Heer Bertrand Russell gebracht, toen het afdrukken van dit deel zijn einde naderde."

En daarna deelt hij de tegenspraak mee, die als de paradox van Russell bekend geworden is. Het had er allen schijn van, dat het doel van Frege, de rekenkunde geheel op de logica te grondvesten, onbereikbaar was. Frege hield tot deze mening over, al trachtte hij er nog op verschillende wijzen aan te ontkomen. Een van de mogelijkheden, die hij onderzoekt, maar wegens de grote moeilijkheden, daaraan verbonden, weer terzijde schuift, is later door Russell uitgewerkt en tot een diepgaande revisie van de formele logica gebruikt.

Hoe dramatisch het falen van Frege ook was, toch mag men zijn werk niet als nutteloos beschouwen. Dat zou even onjuist zijn, als uit het construeren van de atoombom te concluderen, dat alle physici slechts op de ondergang van het mensdom uit zijn. Grote delen van Frege's werk, het beginsel van zijn zuiver formele opzet en talloze oplossingen van detailkwesties zijn van blijvende waarde gebleken. Evenwel was de paradox van Russell wel geschikt om het blinde vertrouwen in de onfeilbaarheid van de logica te ondermijnen. Het is waarschijnlijk mede als reactie op de logische paradoxen, dat Hilbert er toe kwam, logica en wiskunde samen in een formeel systeem op te bouwen en de opgave te stellen, de niet-contradictoriteit van dit systeem te bewijzen ¹⁾. Helaas, ook aan deze opzet was hetzelfde lot beschoren als aan die van Frege: hij bleek in zijn oorspronkelijke vorm niet door te voeren. Evenals bij Frege was de opzet eenvoudig en helder: Vang de mogelijkheden van het menselijke denken in een formeel systeem en bewijs met de eenvoudigste, direct aanschouwelijk duidelijke hulpmiddelen de niet-tegenstrijdigheid daarvan. Maar in de wiskunde zowel als in de natuur blijkt eenvoud steeds minder het kenmerk van het ware. De slag voor de bewijstheorie kwam met de merkwaardige stelling van Gödel, dat de niet-tegenstrijdigheid van een niet-tegenstrijdig systeem nooit bewezen kan worden met bewijsmiddelen, die in het systeem zelf zijn geformaliseerd ²⁾. Al wil dit niet zeggen, dat het bewijs voor de niet-tegenstrijdigheid van de analyse on-

¹⁾ Voor het eerst duidelijk uitgesproken in D. Hilbert, *Neubegründung der Mathematik*. *Abhandlungen math. Seminar Hamburg* 1 (1922) 157—177.

²⁾ K. Gödel. *Ueber formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme I*. *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38 (1931) 173—198.

mogelijk is, de oorspronkelijke opzet wordt toch gestoord en een diepgaande herziening van de bewijstheorie, waarbij haar eenvoudige, doorzichtige opzet grotendeels verloren gaat, is noodzakelijk. Het genoemde bewijs is nog niet geleverd en men weet ook niet, welke bewijsmiddelen daarvoor nodig zullen zijn.

Intussen was een scherpe aanval tegen alle formalistische opvattingen gericht door Brouwer. Hij verzet er zich tegen, dat door de formalisten de gedachteninhoud op de achtergrond gedrongen wordt. Voor hem is die inhoud ook voor het zuiver wiskundige denken essentieel. Ik citeer uit het slot van het eerste hoofdstuk van zijn dissertatie:¹⁾ „In het voorafgaande is van de fundamenteele gedeelten der wiskunde getoond, hoe ze zijn *op te bouwen* uit voorstellingseenheden: door eenvoudige iuxtapositie òf vorming van reeksen van het type ω of η òf van continua; waarbij intusschen in elk stadium van den opbouw als nieuwe eenheden geheele reeds opgebouwde systemen genomen kunnen worden. — Dat geen wiskunde, die niet op deze wijze intuïtief is opgebouwd, kan bestaan; dat dus in dezen opbouw, onder de verplichting, zorgvuldig acht te geven, wat de intuïtie veroorlooft te stellen en wat niet, de eenig mogelijke grondvesting der wiskunde is te zoeken; en hoe elke andere poging tot zulk een grondvesting moet mislukken, zal in het derde hoofdstuk worden uiteengezet.” En ruim 40 jaar later ²⁾: „Wiskunde ontstaat, wanneer de uit een tijdsverschuiving geboren tweehed door het subject van haar qualiteit wordt ontdaan, en wanneer de aldus overblijvende ledige vorm van het gemeenschappelijk substraat aller tweeheden, als oerintuïtie der wiskunde, aan onbeperkte ontvouwing wordt overgelaten . . .”

Brouwer gaat dus terug tot de bron. De formalisten hadden, door eenzijdig de nadruk te leggen op het deductieve element in de methode der wiskunde, deze ad absurdum gevoerd. Al voelen sommigen van hen zich beledigd, als men hun werk een spel met tekens noemt, hun streven is er toch op gericht, de wiskunde daartoe te reduceren, en alle waarderingen, die uit interpretatie, toepassing of historische ontwikkeling volgen, buiten de eigenlijke wiskunde te houden. Brouwer stelt een ander aspect van de wiskunde op de voorgrond: het abstracte karakter, waarvan hij een nieuwe interpretatie geeft. De wiskundige geestesarbeid, gericht van het concrete af, bestaat voor hem in een bouwen in onze geest.

¹⁾ L. E. J. Brouwer. Over de grondslagen der wiskunde. Amsterdam—Leipzig 1907. Blz. 77.

²⁾ Consciousness, philosophy, and mathematics. Proc. Xth intern. Congress of Philosophy. Amsterdam 1948. Blz. 1235—1249.

Meer nog dan andere richtingen heeft het intuitionisme behoefte aan een zekere mate van bijval. Want als inderdaad de wiskundige constructies bouwsels in onze geest zijn, met als bouwstenen de meest elementaire begrippen, in ieder denken aanwezig, dan moet over de al of niet toelaatbaarheid van zulk een constructie geen verschil van mening kunnen bestaan. Natuurlijk betekent dit niet, dat iedereen intuitionistische wiskunde moet kunnen leren. Ook het feit, dat vele wiskundigen van beroep niets voor het intuitionisme voelen, kan nog wel verklaard worden uit gebrek aan belangstelling voor de grondslagen of uit onvermogen, zich in de van de traditionele afwijkende gedachtengang van de intuitionisten in te leven. Maar al diegenen, die de grondslagen van het intuitionisme hebben begrepen, zouden over de uitwerking er van eenstemmig behoren te zijn. Welnu, de feiten leren, dat dit niet het geval is. In dit verband moet in de eerste plaats het werk van Griss genoemd worden, die de negatie uit de intuitionistische wiskunde wil verbannen. „Aantonen, dat iets niet waar is, d.w.z. de onjuistheid van een onderstelling aantonen, is geen intuïtief-duidelijke handelwijze. Van een veronderstelling, die later zelfs blijkt fout te zijn, kan men n.l. onmogelijk een intuïtief-duidelijke voorstelling hebben. Men moet de eis handhaven, dat alleen het opbouwen vanaf de grondslagen, dus zonder gebruik van de negatie, in de intuitionistische wiskunde betekenis heeft.”¹⁾

Men kan deze kritiek niet eenvoudig ter zijde schuiven. Trouwens, in het algemeen krijgt men bij de verschillende begrippen der intuitionistische wiskunde sterk de indruk van een verschillende graad van helderheid, zodat het mogelijk is, trappen van evidentie te onderscheiden. Op de eerste trap staan dan uitspraken als „ $2 \times 2 = 4$ ”, waarin kleine groepen van eenheden beschouwd worden, die wij onmiddellijk kunnen overzien. Reeds de beschouwing van wat grotere natuurlijke getallen staat op een ander plan. Het verschil tussen 1000 en 1001 is zeker minder helder dan dat tussen 3 en 4. Weer veel minder helder is de voorstelling van het orde-type ω , de altijd door voort te zetten rij der natuurlijke getallen. Terecht wijst Griss er op, dat de invoering der negatie ons een trede verder doet afdalen. Uit de genoemde grondbegrippen wordt de analyse opgebouwd, zonder dat sprongsgewijze variaties in helderheid optreden, al veroorzaakt natuurlijk de geleidelijk toenemende complicatie een corresponderende afnemende mate van helderheid, die ten slotte op een zeker punt, dat bij verschillende

¹⁾ G. F. C. Griss. Idealistische filosofie. Arnhem 1946. Blz. 24.

individueen met een zeer verschillende mate van ingewikkeldheid overeenkomt, tot onbegrijpelijkheid leidt. Het is, alsof wij een trap afgaan, die uit het daglicht een donker hol binnenvoert; later gaat de trap over in een langzaam afhellend vlak. Een nieuwe trede van de helderheidstrap dalen wij af bij het begin van de verzamelingsleer, waar de onbepaald voort te zetten rijen worden ingevoerd, en Brouwer's bewijs voor de hoofdstelling der finiete verzamelingen met zijn reflectie op het wiskundige bewijs als een wiskundig systeem staat voor mijn gevoel weer een trap lager.

Die begrippen en methoden, die niet bij alle intuitionistisch georiënteerde wiskundigen instemming vinden, blijken dus bij introspectieve beschouwing een verschillende graad van helderheid te bezitten en door een juistheidsovertuiging van verschillende intensiteit te worden begeleid. De vraag ligt voor de hand, of er dan niet veel voor te zeggen is, ook het van ons denken onafhankelijke bestaan van de wiskundige entiteiten te aanvaarden en zo tot de klassieke wiskunde te komen, ook al zou de helderheid van de begrippen daardoor nog een kleinigheid verminderd worden. Het antwoord op deze vraag luidt voor mij zo, dat deze stap in het geheel niet vergelijkbaar zou zijn met de vroegere. Tot dusver bleven wij in het gebied der gedachtenconstructies, nu zouden wij dat opeens gaan verlaten. Ons zou worden gevraagd, niet maar een nieuwe constructiemethode te aanvaarden, doch een filosofische these, waarvan de zin en de motivering reeds voor de dingen uit het dagelijkse leven twijfelachtig zijn en in de toepassing op de wiskundige entiteiten nog veel onbegrijpelijker worden. De trap, die uit het daglicht langzaam in het duister naar beneden voerde, houdt hier op en de volgende stap zou een sprong zijn in het duister van een bodemloze put.

Aan verschillende delen van de intuitionistische wiskunde komt dus een verschillende graad van evidentie toe, die zowel langs objectieve als langs subjectieve weg bepaald kan worden, waarbij beide methoden althans in grote trekken tot dezelfde uitkomsten leiden. Deze evidentiegraad blijkt samen te hangen met de mate, waarin een bepaalde wiskundige constructie kan worden gerealiseerd. Dit is voor geen enkele, behalve misschien die van de kleinste natuurlijke getallen, volledig het geval. Men gebruikt altijd afkortingen, d.w.z. de resultaten van vroeger uitgevoerde constructies worden als nieuwe constructie-elementen gebruikt. Hierbij speelt het geheugen een rol, maar evenzeer het gebruik van symbolen. Het geheugen bewaart evenwel niet de vroeger opgebouwde systemen zelf, maar alleen die structurele eigenschappen daarvan, die

men later nodig meent te hebben. Die structuur wordt in een eenvoudig, gemakkelijk te onthouden wiskundig systeem vastgelegd. Een algebraïsche formule is de uitdrukking van een eenvoudig eindig wiskundig systeem, dat bepaalde structuureigenschappen van vroeger opgebouwde systemen bezit. Denken wij bijv. aan het merkwaardige product $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Het oorspronkelijke wiskundige systeem, bestaande uit constructies, waardoor uit reële getallen andere reële getallen worden afgeleid, is hier vervangen door een systeem van 8 elementen, a , b , $a + b$, $a - b$, a^2 , b^2 , $(a + b)(a - b)$, $a^2 - b^2$, waartussen bepaalde relaties bestaan. Het toelaten van niet volledig gerealiseerde constructies moet niet als een onvolkomenheid van de wiskundige uitdrukkingwijze beschouwd worden, maar als een wezenlijk kenmerk van de wiskundige denkvorm. Alle in de wiskundige taal uitgesproken oordelen zijn onvolledig, voor zover zij niet de wiskundige constructie, waarop zij betrekking hebben, stap voor stap volgen. „ $2 \times 2 = 4$ ” is de onvolledige uitdrukking van een constructie, die zelf volledig uitgevoerd is; evenzo „Er bestaat een getal, dat het product is van drie verschillende priemgetallen”. Vervangt men hier „drie” door „honderd”, dan spreekt het oordeel niet meer over een werkelijk uitgevoerde, maar over een als uitvoerbaar gedachte constructie. Weer iets verder gaan oordelen als „Voor ieder natuurlijk getal n bestaat er een n -de priemgetal”, waar de als uitvoerbaar gedachte constructie een oneindig aantal gevallen omvat. Op nog een andere wijze onvolledig zijn de oordelen, die de onmogelijkheid van een constructie uitspreken, zoals „Er is geen natuurlijk getal, dat op twee verschillende manieren in ondeelbare factoren ontbonden kan worden”. Ten slotte geldt iedere wiskundige stelling slechts onder bepaalde veronderstellingen, die in haar formulering zo nauwkeurig mogelijk omschreven worden. Maar deze omschrijving is eerst volledig, wanneer de constructie van een wiskundig systeem, dat aan de voorwaarden voldoet, volledig wordt gegeven. En dit is alleen in een bijzonder geval, niet in het algemeen mogelijk. Een al te stricte interpretatie van de constructiviteitseis zou de wiskunde beperken tot constructies, die telkens van het begin af herhaald zouden moeten worden en zou elke algemene uitspraak onmogelijk maken. In het bijzonder is een van ieder taal- of symboolgebruik onafhankelijke intuitionistische wiskunde een fictie, of, om een aangenamer klinkend woord te gebruiken, een idealisatie.

Evenmin als het formalisme voldoet het intuitionisme dus aan de eis, alle discussie over de grondslagen van de wiskunde voorgoed uit de wereld te helpen. Van de intuitionistische wiskundige wordt

verwacht, dat hij een eigen inzicht in de grondslagen verwerft, een inzicht, dat misschien door anderen niet wordt gedeeld en dat steeds voor herziening vatbaar blijft. Maar voor het intuitionisme is deze conclusie niet vernietigend, ze is veeleer een onmiddellijk gevolg van het uitgangspunt, dat de wiskunde als geestelijke activiteit moet worden gezien.

Laten wij, om tot meer positieve uitspraken over het intuitionisme te komen, het uitgangspunt er van wat nader trachten te beschrijven. Volgens de intuitionist begint alle wiskunde met een constructie, die zich voltrekt in aansluiting bij het concreet gegeven, maar daarvan af gericht is. Het proces, waardoor wij van het concreet beleefde tot de wiskundige constructie komen, is ieder vertrouwd, die heeft leren tellen, maar toch is het zeer moeilijk zuiver in woorden te omschrijven. Het behoeft dan ook niet te verwonderen, dat verschillende filosofische systemen het door verschillende interpretaties trachten te benaderen. Ik duid enige er van met een enkel woord aan. Volgens de abstractietheorie abstraheren wij achtereenvolgens van verschillende eigenschappen van het concrete, totdat wij eenheden overhouden, die alleen door hun individualiteit verschillen. Daartegenover stelde Kant, dat de wiskundige begrippen een schema vormen, dat door ons in het waarnemingsproces aan de realiteit wordt opgelegd. Geen dergelijke interpretatie kan voor de intuitionistische wiskunde bindend zijn. Het wiskundige denken is er, voordat het wordt geïnterpreteerd; bovendien vooronderstelt elke interpretatie een niet onbelangrijke mate van wiskundig denken. Een andere vraag is, of een filosofische interpretatie nuttig is om anderen begrip voor het wezen van de wiskunde bij te brengen. In beginsel zijn voor het overbrengen van het wiskundige denken alle suggestiemiddelen, waarover wij beschikken, deugdelijk, tot lijfsdwang toe. Wij willen niet hopen, dat eens een wiskundige inquisitie zal trachten, met brandstapel en pijnbank de wiskundigen tot intuitionistisch denken te dwingen. Niet omdat het middel niet tot het doel zou kunnen leiden: van het feit, dat iemand van een waarheid zo sterk overtuigd is, dat hij bereid is, daarvoor alle beginselen van menselijkheid met voeten te treden, kan een grote suggestieve kracht uitgaan. Ook de door de historische Inquisitie bewerkte bekeringen zijn waarschijnlijk in meerderheid oprecht geweest. Maar hoewel dus lichamelijke dwang zeer geschikt kan zijn tot het bijbrengen van moreel of verstandelijk inzicht, deze methode brengt toch altijd het gevaar mee voor het misverstand, dat slechts een bepaald uiterlijk gedrag geeist wordt; het middel zal dus beter geschikt zijn om formalistische dan om intuitionistische wiskunde

te onderwijzen. Voor de formalisten blijve de gewetensvraag, hoever zij er mee willen gaan.

Een dergelijk misverstand dreigt nu bij gebruik van het suggestiemiddel der filosofische overreding, in die zin, dat de leerling licht zal menen, dat op het abstracte filosofische schema de nadruk moet vallen in plaats van op zijn eigen denken. Een ander bezwaar van deze methode bestaat hierin, dat zij alleen werkt, wanneer de hoorder in staat is, zich op het in de interpretatie vooronderstelde wijsgerige standpunt te stellen; anders wekt zij slechts misverstand. Men denke in dit verband aan het verwijt der neo-positivisten, dat Brouwer zou menen, op mystieke wijze onafhankelijk van de ervaring kennis omtrent de werkelijkheid te bezitten, een misverstand, dat slechts kon ontstaan, doordat zij niet in staat waren, zich op het door Brouwer ingenomen semi-Kantiaanse standpunt te stellen.

De filosofische interpretatie van het wiskundige denken roept allerlei netelige problemen op. Verschillende er van hebben wij terloops al aangeraaakt. Hoe verhoudt de wiskunde zich tot de zintuiglijke ervaring? Komt zij daaruit voort of gaat zij er aan vooraf? Hoe moet men zich het verband denken tussen de wiskundige systemen, die verschillende wiskundigen in hun geest opbouwen? Een vraag, die slechts te beantwoorden valt, als men een bepaalde theorie over de menselijke verstandhouding, dus een bepaald wijsgerig stelsel vooropstelt. Welke rol spelen de formele ontwikkelingen, het rekenen in ruime zin genomen, in de wiskunde? Zijn de formules essentieel als werktuig in het wiskundige bedrijf of heeft men zich een geidealiseerde wiskunde te denken, die slechts in de geest van een geleerde zou bestaan en zich door geen enkele constateerbare materiele begeleiding zou manifesteren? Zo kan men doorgaan met vragen. De dwaasheid van de eis, al deze vragen te beantwoorden, voordat men wiskunde kan beoefenen, springt in het oog bij een eenvoudige vergelijking. Kleine Christientje van 2 jaar tracht op de tafel te klimmen, waarop een schaal met sinaasappels staat. Moeder constateert, dat zij een sinaasappel wil hebben. Zullen wij haar van intellectuele lichtzinnigheid beschuldigen, tenzij zij eerst de vragen beantwoordt, of Stientje een vrije wil heeft, of deze vraag een zin heeft en zo ja, wat hij dan precies betekent? Welnu, als wiskunde een denkvorm is, dan is het wiskundige denken een realiteit van dezelfde orde als Christientjes gedachtengang; evenals de laatste zal het zich in zekere uitingen en handelingen manifesteren, waaruit anderen die wiskundige gedachten kunnen reconstrueren. Niet alle anderen. Ook de begeerte naar de sinaasappel is onbegrijpelijk voor een baby van een half jaar en zal

verkeerd begrepen worden door een Eskimo, die geen sinaasappels kent en menen zal, dat het alleen om de mooi gekleurde bal begonnen is.

Ik meen daarom, dat zowel voor het grondslagenonderzoek zelf als voor het onderricht een methode het vruchtbaarst is, die het midden houdt tussen die van de vakwiskundigen en die van de filosofen, namelijk deze, dat men tracht, zich het wiskundige denkproces zo zuiver en helder mogelijk tot bewustzijn te brengen, zonder er bepaalde metaphysische of psychologische interpretaties van te geven; deze methode is niet alleen geschikt om eigen inzicht te verhelderen, maar ook om anderen begrip van het wezen van de wiskunde bij te brengen. Maar dan moeten wij die wiskunde nemen zoals zij is en niet trachten haar te idealiseren. Dan zien wij, dat de intuitionistische wiskunde bestaat in een bouwen in onze geest, begeleid en gesteund door rekenen met symbolen. Door hun propagandistische werkzaamheid geven de intuitionistische wiskundigen blijk, dat zij er prijs op stellen, met anderen aan hun wiskundige bouwsels samen te werken. Het onderlinge verkeer heeft zowel door middel van de gewone omgangstaal als door een symbolentaal plaats. Bij het toetreden van nieuwe leden tot de gemeenschap speelt eerst de omgangstaal de voornaamste rol; later, wanneer men elkaar heeft leren begrijpen, treedt zij op de achtergrond tegenover de symbolentaal. De intuitionistische wiskunde doet zich dus voor als een geestelijke activiteit, waaraan verschillende personen deelnemen, onderling verbonden en gesteund zowel door de omgangstaal als door de wiskundige vaktaal en de symbolentaal. Essentieel is, dat ieder lid van de groep zich bewust is van een bouwende activiteit in zijn geest, en deze, evenals de daarmee verbonden juistheids-overtuiging, min of meer duidelijk weet te beschrijven. De studie van dit cultuurverschijnsel is niet de taak van de wiskundige, maar die van de filosoof, de psycholoog en de socioloog.

Wij hebben verschillende opvattingen over de grondslagen der wiskunde de revue laten passeren en geconstateerd, dat geen daarvan de absolute waarheid bezat in die zin, dat zij alle verdere discussie overbodig zou maken. Daarna hebben wij de intuitionistische opvatting wat nader beschouwd. Ik wil nu nog even ingaan op de vraag, wat ons er toe kan brengen, ons in de grondslagenkwesties te verdiepen en de moeizame arbeid van een intuitionistische wederopbouw der wiskunde te ondernemen. Drijft ons alleen de lust, gelijk te krijgen tegenover de klassieke school? Ook op deze vraag is een antwoord alleen te verwachten van een onbevooroordeelde beschouwing der wiskunde. Van ethisch standpunt gezien bestaat

het streven naar wiskundige strengheid in een zoeken naar zuiverheid en helderheid in het denken, die de wiskundige meestal niet duidelijk kan omschrijven, maar wel zeer bewust beleeft. Wij hebben al gezien, dat de wiskundige strengheid ook voor de formele ontwikkeling der wiskunde nuttig en nodig is en daardoor vruchtbaar voor de toepassingen. Deze ervaring uit het verleden zou het streven naar verdere opvoering der strengheid reeds voldoende motiveren. Toch geloof ik, dat de grondslagenonderzoekers nog iets anders voor de geest staat. Er is veel over gestreden, of de training, die de beoefening der wiskunde geeft in het logisch denken, de leerling ook op ander gebied beter leert denken; het schijnt, dat deze overdracht van denkgewoonten op ander gebied slechts in geringe mate plaats heeft. Maar wanneer wij ons niet tot een individu beperken, doch het denken van de mensheid in haar geheel in het oog vatten, valt een parallel verloop tussen het denken op verschillende gebieden niet te ontkennen. Het staat toch wel vast, dat de ontdekking van de autonomie van het denken door de Grieken een van hun belangrijkste bijdragen tot onze cultuur is geweest en in ons gehele begrippensysteem is doorgedrongen. Zo gaat ook het doordringen van het besef, dat de niet-euclidische meetkunde haar goed recht van bestaan heeft, hetgeen de bevrijding van de meetkunde uit eeuwenoude dogmatische banden meebracht, parallel met een dergelijke bevrijding in de natuurkunde — men denke aan de relativiteits- en quantentheorie —, maar ook op wijsgerig en sociaal terrein. Wat de physica betreft is er een aantoonbaar causaal verband in deze zin, dat de omwenteling in het wiskundige denken voorafging aan die in de physica en de laatste duidelijk beïnvloedde. Voor andere gebieden kan men beter van een beweging in het denken in het algemeen spreken, waaraan de wiskunde deel heeft in voortdurende wisselwerking met andere denkvormen. Wanneer ik in dit verband nog even mag terugkomen op de koene gedachte van collega Schouten, namelijk dat de intuitionistische wiskunde wellicht daarom met zoveel geestdrift beoefend wordt, omdat de natuurwetenschap in een volgend stadium van haar ontwikkeling behoefte zou hebben aan de nieuwe logica; dan zou ik dit denkbeeld aldus willen aanvullen, dat de toepassing even goed zou kunnen liggen op het gebied der geesteswetenschap. Misschien kan de denkvorm der intuitionistische wiskunde met andere denkvormen in vruchtbare wisselwerking treden, ja, de grote belangstelling voor het intuitionisme van de zijde der logici en kentheoretici maakt dit zelfs waarschijnlijk. In ieder geval worden de wiskundigen, en speciaal de onderzoekers der grondslagen, bij hun werk gedragen door de overtuiging, naar eigen aard een essentiële bijdrage te leveren tot de bloei van onze cultuur.

RONDOM HET FUNCTIEBEGRIIP

door

Dr J. KOKSMA.

„Doe niets toevallig, noch anders dan volgens de juiste regelen der kunst.”

Marcus Aurelius (vertaling Dr N. van Suchtelen).

„Het doel van elk bewijs is helderheid van inzicht in een structuur, en de verscherping van exactheids-eisen mag enkel het gevolg zijn van het doorzien van problemen, die die helderheid hebben vertroebeld.”

Prof. Dr Hans Freudenthal (Eucl. 24, p.110)

In het artikel over functies en grafieken, dat ik onlangs inzonderd ¹⁾, werd stilzwijgend aangesloten bij de gangbare opvatting van het begrip functie; herinnerd werd alleen aan de karakterisering door de begrippen „afhankelijk” en „veranderlijk”, die echter niet nader werden geanalyseerd. Dit was natuurlijk volkomen toelaatbaar; bij de nadere uitwerking maakte ik me echter schuldig aan een lichte vorm van mystificatie, namelijk daar, waar aan de functie (of de grafiek) één „dynamisch” karakter werd toegeschreven. Aan de conclusies van het artikel deed dat niets af; in het verband, waarin ze gegeven werd, sta ik trouwens wel voor deze qualificatie, maar wetenschappelijk wiskundig bekeken is ze onzin. Dat was ik me wel bewust en voor de didactiek leek het me niet zonder belang; vandaar dat ik oorspronkelijk voornemens was van een analyse van het functiebegrip uit te gaan. Ik zag er van af, allereerst omdat ik door de ontijdige ontmaskering van deze quasi-dynamiek het betoog niet (al was het slechts in schijn) wilde verzwakken, met andere woorden, omdat ik meende bij mijn beperkt doel: critiek op het aanvankelijk functieonderwijs, met deze kromme stok een rechter slag te kunnen slaan. En verder, omdat deze analyse moest leiden tot didactische gezichtspunten, die naast de eigenlijke conclusies van het artikel hun deel van de aandacht op ongewenste wijze zouden opeisen.

Die nadere analyse volgt nu hier en het is best mogelijk, dat men

¹⁾ Eucl. 25, p. 55 e.v.

de uitkomsten, die me toen trouwens slechts in grote trekken voor de geest stonden, hier en daar eerder tegenover dan naast de vroegere slotsom zal willen stellen. Voorzover ik dat nu kan overzien, zal dat voor die punten in het vorige artikel mogen worden vergeleken bij het verwaarlozen van termen van hogere orde in een eerste benadering van goed functieonderwijs; het zou slechts natuurlijk zijn, als in een tweede benadering een correctief element zou blijken te steken. In die eerste benadering werd trouwens niets gegeven, dat niet terstond door ieder realiseerbaar was, het nu volgende zal, in zijn kerngedachte althans, nog wel enige studie eisen, voordat het in detail zover is uitgewerkt, dat het volkomen kan worden toegepast.

De kern van de zaak ligt hier: wordt al het wiskundig gebruik van de term „afhankelijk” door de eigenlijke betekenis daarvan gedekt, met het woord „veranderlijk” is dat niet het geval. Ik wil dat graag wat breder toelichten en daarom beginnen met een reeks voorbeelden van functies, die aan gebieden buiten de wiskunde zijn ontleend.

Allereerst zijn er dan die functies, waarin de tijd als onafhankelijk variabele optreedt, bijvoorbeeld economische of sociale statistieken; het eigen lichaamsgewicht als functie van de leeftijd; functies uit de mechanica, als weg en snelheid in hun afhankelijkheid van de tijd.

Een tweede soort voorbeelden bevat de tijd niet, de onafhankelijk variabele kan bijvoorbeeld een volume zijn als in de wet van Boyle, een weerstand als in de wetten van Ohm, een temperatuur, als in quaesties van uitzetting. Toch kan men hier de tijd nog als een soort onderstroom meespelend denken; eigenlijk doet men dat, wanneer men de onafhankelijk variabele zich werkelijk denkt als *veranderend*. Dat heeft zijn voordelen, ik herinner me nog levendig het grafiekje in het leerboek, waaruit ik de wet van Boyle leerde. Onder de *v*-as en er evenwijdig aan was een cylinder getekend, waarvan het gesloten einde zich onder de oorsprong bevond, de stand van de zuiger correspondeerde met een getal op de as. Men kwam er als van zelf toe de zuiger in gedachten in te drukken en zag dan als het ware de spanning met de grafiek omhooglopen. Bij de wet van Ohm is stellig het functioneel verband evenzo sprekend, wanneer men bijvoorbeeld een schuifweerstand varieert en de wijzer van een ampèremeter mee laat dansen. Iets soortgelijks geldt voor de uitzetting bij verhoging van temperatuur.

Een onderscheid met de eerste soort is er zeker: men behoeft volume, weerstand of temperatuur niet monotoon te variëren, men

behoeft ze in 't geheel niet te variëren. De tijd daarentegen kan niet worden stil gezet, hij is de grote onafhankelijk variabele, de enige onvervalste „doorloper” van intervallen. Alleen bij zijn gratie zijn het volume en zijn genoten variabel, hun onafhankelijkheid ligt in de willekeur, die men te dezen aanzien vrij is uit te oefenen. Het functioneel verband brengt blijkbaar niet mee, dat op de *feitelijke* veranderlijkheid de klem moet worden gelegd. Het is zelfs beter, dat niet te doen, maar slechts aan te sturen op het (in schijn beperkter) inzicht, dat in het geval bijvoorbeeld van de wet van Boyle bij elke waarde van het volume een waarde van de spanning hoort. De wet van Boyle is typisch een wet der statica en wanneer sommetjes over: „men giet kwik in het ene been . . .” moeite geven, komt dat stellig mee daar vandaan, dat de leerling vagelijk het gevoel heeft op één of andere duistere wijze dat „gieten” te moeten uitrekenen. Kan men hem duidelijk maken, dat hij niets te doen heeft dan het met elkaar in verband brengen van spanning en volume in *twee toestanden van evenwicht*, dan gaat het meteen veel beter.

Hier blijkt dus een functieopvatting het vruchtbaarst, waarbij het tijdselement op de achtergrond gedrongen is en daarmee is de overgang gemaakt naar een derde soort voorbeelden, waaruit de tijd geheel verdwenen is, zoals de (jaarlijkse) rente als functie van het kapitaal, de belasting als functie van het inkomen of het atoomgewicht als functie van het atoomnummer in het oudere periodiek systeem. Mogelijk zal men nog een kapitaal laten aangroeien, bij een salaris doet dit al meer gekunsteld aan (al zou een leraar kunnen zwichten voor galgenhumoristische neigingen) en bij het laatste voorbeeld is zoiets geheel onmogelijk. Wil men het argument der genoemde functies „variëren”, dan zal men niet een kapitaal of inkomen verschillende bedragen of een atoomnummer verschillende waarden laten „doorlopen”, men zal in het algemeen denken aan een *ander* kapitaal, een *ander* inkomen, aan *verschillende* elementen.

En hiermee zijn we genaderd tot het wiskundig functiebegrip, dat voor de tijd geen plaats meer heeft, er niets mee kan beginnen. Tijdstip, volume of kapitaal, het is hier alles slechts getal; doorloopt de tijd een interval, wordt het volume gevariëerd, of is er sprake van verschillende kapitalen, dan is er hier slechts een verzameling van getallen. De wiskunde voert een symbool t , of k , of x in en definieert, dat dit symbool elk der getallen van deze verzameling betekenen kan. Men noemt dat symbool nu een „veranderlijke”, de getallen der verzameling de „waarden” der veranderlijke en voegt aan elk dier waarden op bepaalde wijze een getal toe. Daarmee is dan de functie gedefinieerd. Dit is natuurlijk niets nieuws, meer of minder

uitdrukkelijk vindt men het in elke differentiaalrekening, de hier gegeven formulering is ontleend aan de „Grundzüge der Differential- und Integralrechnung” van Gerhard Kowalewski.

Men ziet: van „veranderen” in de zin van een gebeuren in de tijd is hier geen sprake; een woord bijvoorbeeld als „achtereenvolgens” in dit verband een wiskundige zin te willen geven, zou de noodzaak betekenen, de tijd als funderend wiskundig begrip uitdrukkelijk in te voeren. Een zinloze onderneming, men zou het toch weer op het getal terug moeten brengen, en was dan evenver.

Het zou me niet verwonderen, wanneer in bovenstaande reeks voorbeelden met het wiskundig functiebegrip als sluitstuk globaal genomen een historische ontwikkeling weerspiegeld werd: de tijds-idee komt hoe langer hoe meer op de achtergrond en wordt ten slotte bewust geëlimineerd. De *terminologie* heeft zich dan niet in die richting ontwikkeld, men zou zelfs kunnen vinden, dat bij het wiskundig functiebegrip in dit opzicht van een terugval gesproken moet worden in vergelijking met de laatste groep voorbeelden. Spreekt men van een „toenemend” kapitaal, dan bedoelt men toch eigenlijk te zeggen, dat men een *ander*, groter kapitaal gaat beschouwen. Het is de vraag of dat altijd zo duidelijk voor ogen staat, als men het heeft over een „toenemende” x ; er is reden om aan te nemen, dat, althans in ons onderwijs, de terminologie niet steeds op de secundaire plaats staat waar ze hoort. Met andere woorden: dat men bij de introductie van het functiebegrip wel van dat „veranderen”, „toenemen”, „doorlopen” *uitgaat*, deze termen vooropstelt als intuïtief duidelijke begrippen, waarop het inzicht in de functie moet worden gebaseerd. Een zinnetje als: „We denken ons x *veranderlijk*, d.w.z. we stellen ons voor, dat x achtereenvolgens verschillende waarden aanneemt”, dat in het vorige artikel in zijn verband werd geciteerd, doch niet gecommentarieerd, is hier symptomatisch. Hier wordt getracht *meer* bij te brengen, dan het exacte functiebegrip inhoudt; dat x veranderlijk is, wil enkel zeggen, dat x verschillende getallen kan betekenen. Op het eerste gezicht kan deze correctie te ver gezocht lijken, om er verder over te praten; ik meen echter te kunnen aantonen, dat *ten eerste, het uitgaan van de terminologie, van de „veranderlijkheds”-suggestie dus, kan leiden tot het scheppen, althans vergroten van incidentele moeilijkheden* (die misschien toch niet geheel te vermijden zijn), *zodra men het functiebegrip wil toepassen*; en daarmee in onmiddellijk verband, *ten tweede, dat de moeilijkheden verminderd worden, zodra men het exacte functiebegrip uitdrukkelijk vooropstelt*.

Formeel gezien is dat vooropstellen van het exacte begrip trouwens eis: indien iemand pretendeert les in wiskunde te geven, moet hij zich ook aan de wiskunde houden. Practisch is op het exacte begrip niets tegen, voert men het functiebegrip met wiskundige voorbeelden in, dan kan men heel goed blijven staan bij de opmerking, dat bij elke waarde van het argument een waarde van de functie hoort. Meer houdt het exacte begrip niet in en waarom zou men trachten het nog „duidelijker” te maken door het letterlijk nemen van termen, die, wiskundig bekeken, onzin zijn? De reeks voorbeelden van buiten-wiskundige aard maakt de overschatting van de terminologie begrijpelijk, toch geeft de „veranderlijkheds”-gedachte bij sommige al een gekunstelde indruk en ten slotte zijn ze alle van het wiskundige begrip uit licht te vatten. De waarde van de terminologie in de beschrijving van de relatie tussen functie en argument wordt hier natuurlijk niet ontkend, uiteraard kan men van haar suggestieve kracht ook dankbaar gebruik maken tot didactische doeleinden. Alleen, die relatie behoort eerst zonder die termen te worden ingezien, pas daarna kan men de terminologie gaan gebruiken.

Aan de genoemde twee stellingen kan ik nog een derde toevoegen, de belangrijkste, namelijk *dat het langs de voorgestelde weg mogelijk moet zijn, het functiebegrip veel geleidelijker in te voeren, althans de leerling van het begin af veel meer op dat begrip voor te bereiden, dan thans gebeurt.*

De uitwerking dezer drie punten wil ik enigszins breed opzetten en daarbij enige dingen bespreken, die op het oog niet zoveel met het onderwerp te maken hebben, doch mijns inziens zeer goed dienstbaar gemaakt kunnen worden aan de verdieping van het functieinzicht.

Om te laten zien, welke hindernissen bij de toepassing van het functiebegrip moeten worden genomen, neem ik een willekeurig vraagstuk, dat kan worden opgegeven, nadat de quadratische functie is behandeld:

1. *Gegeven de vierkantsvergelijking $2x^2 + ax + a - 6 = 0$. Wat is de kleinste waarde, die de som van de quadraten der wortels kan aannemen?*

Zou een leerling, die de vierkantsvergelijking in de zak had, na de quadratische functie à bout portant voor dit vraagstuk als eerste toepassing worden gesteld, dan zou men van hem nauwelijks een doordachte oplossing mogen verwachten: hij ziet de functie niet! Maar hij heeft toch geleerd, hoe hij de som van die quadraten moet berekenen? Zeker, maar zo hij zich dan al rekenschap van het karak-

ter van het teken a heeft gegeven, heeft hij daarin stellig een *constante* gezien, en men mag van hem toch wel niet eisen, in zijn onrijpe staat uit eigen kracht te komen tot een inzicht, dat (als men het jaarboekje 1926 der Gron. Nat. Phil. Fac. Ver. mag geloven) te Groningen althans nog op college werd uitgesproken, het inzicht namelijk, dat „het métier van een constante in de wiskunde is variabel te zijn.”

Het vraagstuk is met het oog op later gebruik wat ondoorzichtig gesteld: het „variabel” karakter van a had kunnen worden gesuggered, ook zullen er allicht wel eerst eenvoudiger sommetjes gemaakt zijn. Met dat al bestaat ook daar deze moeilijkheid en doet hetzelfde zich voor bij elke toepassing, die in de wiskunde van functies gemaakt wordt. De karakterverandering bij de ongemerkte overgang van constant in variabel valt moeilijk te rijmen met een letterlijke opvatting van „veranderlijkheid”, en heeft men zich moeite gegeven het functiebegrip van daaruit bij te brengen, dan kan de juiste voorbereiding tot de toepassing alleen bestaan uit de poging, dat weer ongedaan te maken. Voortdurend zullen anders didactische impromptu's nodig blijken, die, hoe verdienstelijk op zich zelf, toch weinig passen in een geleidelijke ontwikkeling van de leerstof.

Aan de andere kant valt die overgang op grond van het exacte functiebegrip gemakkelijk te begrijpen, de oplossing van het probleem staat op bladzijde 1 van elk algebraboek. Daar kan men namelijk lezen, dat een letter dient ter aanduiding van een *willekeurig* getal, dat is dus van *elk* getal, dat is van *alle* getallen. Zo gezien zal men misschien lust gevoelen de betekenis van de letter in verband met de aard van het vraagstuk te beperken, die beperking zou dan echter al bij het woord „willekeurig” moeten worden vermeld, bijvoorbeeld door de toevoeging, dat het getal in dat verband „in aanmerking moet komen”, „zin moet hebben”, met andere woorden, dat het een getal uit een gegeven verzameling moet zijn. Maar daarmee is de betekenis van de „letter” vastgelegd door de definitie, die boven van een „veranderlijke” gegeven is! Zou men de laatste term onmiddellijk op die zelfde bladzijde 1 voor de „letter” invoeren, dan zou daarmee in niets tegen de geschreven wetten der algebra gezondigd zijn, in principe is het begrip „veranderlijke” van het begin af aanwezig.

Het zuiver formele karakter van de algebraïsche bewerkingen brengt nu echter mee, dat men zich te minder rekenschap behoeft te geven van hetgeen door de letter wordt gerepresenteerd, naarmate de routine groter wordt. Voor de wiskundige valt een vraagstuk als

het aangehaalde geheel binnen het routinegebied, waarin hij zich de betekenis der symbolen nauwelijks behoeft te realiseren; voor zover hij dat doet, is voor hem toch „een willekeurige . . .” synoniem met „elke . . .”, dus met „alle . . .” De leerling echter, die moet leren een symmetrische functie van de wortels ener vierkantsvergelijking in de coëfficiënten uit te drukken, heeft daarbij (terecht!) één bepaalde vergelijking voor ogen. Een in de coëfficiënten optredende letter a heeft voor hem het karakter van een constante, hij zal uitdrukkelijk moeten worden herinnerd aan het ware karakter van a , wil hij leren er straks een variabele in te zien.

Formeel wiskundig (en ook van de wiskundige routine uit) gezien is ons probleem dus een schijnprobleem, in de psychologie van de wiskundeleerling bestaat het echter wel degelijk, al treedt het bij ons onderwijs in scherper vorm en plotselinger op, dan onze didactiek hoeft toe te laten. Oorzaak daarvan is in de eerste plaats, *dat we de in het begin aanwezige begrippen weer geheel laten verbleken en verdoezelen en ten tweede*, dat we ze een anderhalf jaar later, inplaats van uitdrukkelijk weer bij het begin aan te knopen, *met enig tam-tam als iets geheel nieuws aan de orde stellen en daardoor en daarbij nieuwe moeilijkheden scheppen*, bijvoorbeeld door het pogen die bij voorbaat te ondervangen door nadruk te leggen op zinledige begrippen.

Met het blootleggen van de tweede oorzaak is het boven in de eerste beide programapunten gestelde wel ongeveer toegelicht; de eerste oorzaak stelt de didactiek voor de in het derde punt aangeroerde opdracht, te onderzoeken in hoeverre beter partij kan worden getrokken van het in het begin der algebra geleerde. Niet alleen de veranderlijke is daar aanwezig, de functie treedt vrijwel tegelijkertijd op: *in feite is het eerste substitutiesommetje de eerste functieoefening*. Het moet toch mogelijk zijn deze begrippen te onderhouden en geleidelijk meer te prononceren, om zo als van zelf het opzettelijke functieonderwijs daarbij aan te laten sluiten. Meteen zou op deze wijze het functiebegrip de gelegenheid krijgen ten volle enkele desiderata te vervullen; die in de tijd van discussie over de invoering van het huidige leerplan veel naar voren kwamen: het zou op ons onderwijs een „fermenterende” werking uitoefenen en de leerstof volledig „doordringen”. Welnu, zodra men in de meetkunde (en waarom niet in de natuurkunde?) aan de berekeningen toe is, verbreedt zich het veld van toepassing en is er ook alle gelegenheid voor uitbouw. Men stelle zich de mogelijkheden voor, die lettervraagstukken bieden: potentiëel zijn het alle functie-vraagstukken. Waar wij ook kijken, overal, ja overal lacht ons de functie tegen!

Misschien zie ik hier de mogelijkheden te rooskleurig, het zal ook

nog wel een poosje duren, voordat een volledig in detail uitgewerkte opbouw in deze geest ter beschikking staat. Ik kan daarover slechts enkele opmerkingen maken; die opbouw heb ik niet te bieden, dat zou trouwens neerkomen op het schrijven van minstens een complete algebracursus. Er is dan ook geen sprake van een systematische ontwikkeling langs deze lijn, als niet de leerboeken voorgaan door goed doordachte series oefeningen te geven, een goed leerboek behoefde daartoe mogelijk nauwelijks ingrijpend te worden gewijzigd. Wat het vertrouwd maken met de begrippen betreft, moet men het belang van het leerboek ook weer niet overschatten, daar komt het het meest aan op de man voor de klas. Door toepassing van het „frappez, frappez toujours” kan men al heel wat inhameren aan begrippen en onderscheidingen, ook al zouden ze nergens opgeschreven staan; daar zonder komen ze er niet in, ook al zou het leerboek ze herhaaldelijk noemen.

Allereerst is er nu te wijzen op de voordelen, die het exacte functiebegrip al biedt, ook zonder dat de leerling er op de aangegeven geleidelijke wijze mee vertrouwd gemaakt is, al zou het eerst dan volledig tot zijn recht komen.

Zo kan men ter oplossing van het soort vraagstukken, waartoe het aangehaalde vraagstuk 1 behoort, in volkomen overeenstemming met dat exacte begrip een juiste stimulans geven, wanneer men ze ook eens redigeert in een vorm, waarin van vergelijkingen, in het meervoud dus, gesproken wordt. Niet altijd natuurlijk, de leerling zou weer blijven steken bij een vraagstuk in de hier gebezigde redactie. Is hij aan deze gewend, dan doet zich namelijk hetzelfde wel voor, wanneer dat méérvoud plotseling in een vraagstuk verschijnt; men heeft daarop een goede kans bij vraag *b* van eindexamenvraagstuk ¹⁾ Algebra 1940, 2, misschien ook bij vraag *e* van 1937, 1, hoewel die vraag nog al suggestief gesteld is. In elk geval doet men goed bij ieder vraagstuk in de „enkelvoud”-redactie op het „meervouds”-karakter daarvan te wijzen; zo iets kan bijvoorbeeld alvast beginnen bij de *algemene* lineaire functie $ax + b$, waarin immers door de willekeur der coëfficiënten alle lineaire functies begrepen zijn. Geeft men zo uitdrukkelijk het woord „algemeen” in dit verband zijn precieze zin, dan zijn *a* en *b* daarmee vanzelf gekarakteriseerd als variabelen in de zin van de strenge functiedefinitie.

Dit verlevendigen van het functiebegrip op exacte grondslag heeft niet tot de algebra beperkt te blijven. De algebra geeft zelf wel

¹⁾ Van de H.B.S., evenals alle verder te citeren eindexamenopgaven.

meetkundige toepassingen van haar uitkomsten, de trigonometrie beschouwt haar eigen functies. Men kan bij tijd en wijle een *willekeurige* driehoek eens zien als representant van *alle* driehoeken, het bepaald zijn door drie gegevens als de keuze van precies één (congruente als identiek beschouwd) uit de gehele verzameling, die ene met al zijn lijnstukken en hoeken als functioneel afhankelijk van die drie gegevens als variabelen. Vergenoegt men zich met minder dan drie gegevens, dan kan de aandacht worden gevestigd op de zodoende afgezonderde deelverzameling; geeft men bijvoorbeeld basis en tophoek, dan kan men alle mogelijke driehoeken in de omgeschreven cirkel zien staan. Wijst men op de mogelijkheid van keuze van een exemplaar door keuze van een basishoek, dan wordt bijvoorbeeld de hoogte van de driehoek als functie aan die basishoek toegevoegd.

Bij de trigonometrische extreemopgaven is dit een zeer dankbare behandelingswijze, ze gaat bovendien het te mechanisch werken tegen, dat anders moeilijk te vermijden is. Men kan zich althans bij de lezing van sommige eindexamenopgaven van dit soort moeilijk onttrekken aan de gedachte, dat bij de opstelling nauwelijks functioneel gedacht is; zo heb ik soms de indruk, dat bij het stellen van de extreemvraag niet als daaraan zin gevende voorwaarde het oorspronkelijke gegeven voor ogen heeft gestaan, maar één der inmiddels afgeleide goniometrische betrekkingen. Ik citeer als sprekendste voorbeeld 1936, 2 en geef door cursivering aan, hoezeer bij de formulering constantie gesuggereerd is:

„De straal van *de* omgeschreven cirkel van *driehoek* ABC is *gelijk* aan R. De bissectrice van hoek C snijdt AB in D en bij verlenging de omgeschreven cirkel in E.

- a. Druk CD en CE uit in R en de hoeken α en β .
- b. Als $CE : CD = 3 : 2$, bewijs dan: $\cos (\alpha - \beta) = 2 - 3 \cos \gamma$.
- c. Leid uit het onder b bewezene af, dat *de hoek γ een maximumwaarde heeft* en bereken die maximumwaarde”.

Mogelijk is tegen de slotzin geen steekhoudend bezwaar te maken anders dan van wiskundig-aesthetische aard, maar het gecursiveerde gedeelte maakt op mij een paradoxale indruk, die me doet geloven, dat ze zuiver uit mechanische routine is neergeschreven onder de suggestie van de goniometrische betrekking onder b. Ik maak me sterk, dat geen examinandus, wiens oplossing van dit vraagstuk met een tien werd gehonoreerd zich bewust is geweest, dat hij de hoek γ heeft berekend van die driehoek onder alle met de eigenschap $CE : CD = 3 : 2$, waarvoor die hoek het grootst is, en daarnaast, dat evenmin iemand de noodzaak gevoeld heeft na te gaan, of inderdaad de hoek γ van een driehoek met de genoemde eigenschap de berekende waarde kan bezitten.

Worden sommen als deze mechanisch gemaakt, dan zijn ze natuurlijk waardeloos, een betere redactie zou dan trouwens weinig helpen. Op de geschetste wijze behandeld zouden ze echter veel tot verdieping van het functieinzicht bij kunnen dragen.

Een verdere analyse van de vraagstukken, waarin het functiebegrip wordt toegepast, brengt nog enige punten aan het licht, waarvan systematische behandeling althans indirect kan bijdragen tot het verhelderen van deze materie.

Eerst moet er nog op worden gewezen, dat met de Groninger typering het aantal rollen van acteur a uit vraagstuk 1 nog niet is uitgeput: ziet de leerling a aanvankelijk als constante, zodra de functie in wiskundige vorm gebracht is, wordt a variabele, daarna (wanneer we een onderzoek door quadraatafsplitsing eisen) onbekende, om ten slotte, als de gezochte waarde is gevonden, weer constante te zijn.

Een nieuwe moeilijkheid treedt echter op in vraagstuk

2. *Schrijf 100 als som van twee getallen, zodanig, dat hun product zo groot mogelijk is.*

De onafhankelijk variabele is niet genoemd! Of die hier onmiddellijk zal worden aangewezen, betwijfel ik, als dit het eerste vraagstuk is na de engerè functie vragen. Zelfs daar kan het voorkomen, dat men na enige opgaven over „de functie $ax^2 + bx + c$ ”, waarvan de coëfficiënten uit drie gegevens moeten worden bepaald, op volslagen hulpeloosheid stuit, wanneer men „de quadratische functie” (zonder nadere aanduiding) gezocht wil zien, die aan drie soortgelijke voorwaarde voldoet.

Maar is in vraagstuk 2 het argument gekozen, dan wordt meteen het aantal er door te spelen rollen schijnbaar met één vermeerderd, het begin: „stel het ene getal x ” lijkt zoveel (en niet ten onrechte!) op de traditionele aanhef van de oplossing der zogenoemde ingeklede vergelijkingen, dat men geneigd is hier in x een onbekende te zien. Het is natuurlijk mogelijk het vraagstuk in zijn geheel als ingeklede vergelijking op te vatten, zodat x werkelijk van de aanvang af onbekende zou kunnen zijn; bij een nadere analyse van de oplossing zou dan echter toch een soortgelijk stuivertje wisselen voor de dag komen.

Intussen zal het opstellen van de functie nu verder wel geen moeilijkheden meer geven. Anders is dat in het nu volgende voorbeeld:

3. *In een gegeven driehoek met basis c en hoogte h een rechthoek te beschrijven waarvan twee hoekpunten op de basis liggen en de andere twee elk op één der opstaande zijden, zodanig, dat het oppervlak van de rechthoek zo groot mogelijk is.*

Hier leidt het opstellen van de functie tot een vrij gecompliceerd vraagstuk, dat op zich zelf een ingeklede vergelijking is en waarin de leerling onder de suggestie van al het vooralsnog vage, dat nog komen moet, licht kan blijven steken. Kom, kom, als hij de hoogte van de rechthoek x stelt, zal hij toch zeker in staat zijn de oppervlakte in x , c en h uit te drukken? Nu, dat is een heel program, dat hij bovendien zich zelf moet stellen, maar hij maakt een kans, wanneer aan twee voorwaarden voldaan is. De *eerste* is, dat hij in staat moet zijn, *het opstellen van de functie als een apart vraagstuk te zien*, dat met functies in engere zin niets te maken heeft, maar een gewoon meetkundig lettervraagstuk is. De ervaring leert, dat de oplossing van een vraagstuk dikwijls al strandt op het onvermogen het zelf in etappes in te delen, of zelfs maar op de gedachte van een dergelijke indeling te komen. In extreemvraagstukken als het onderhavige kan men stelselmatig een verdeling voorschrijven in vier etappes: *a)* het uitdrukkelijk identificeren als „de functie” van de grootheid, die extreem moet zijn; *b)* het daarbij zoeken van een onafhankelijk variabele, in ons geval bij voorbeeld door na te gaan door de keuze van welke grootheid een ingeschreven rechthoek zou kunnen worden bepaald; *c)* het zich stellen en oplossen van het boven bedoelde lettervraagstuk, waarbij de functie in de onafhankelijk veranderlijke en de gegevens wordt uitgedrukt; *d)* het oplossen van het functie-vraagstuk.

De *tweede* voorwaarde is, dat de leerling precies weet, wat „uitdrukken in” betekent. Eerlijk gezegd sla ik het „uitdrukkingsvermogen” van de gemiddelde leerling niet hoog aan, zeker niet, als hij alleen op door oefening verkregen routine moet werken en daarbij niet een handje via zijn inzicht geholpen is. Dat is een van de dingen die een leraar pas door ervaring gewaar wordt, ik althans had indertijd niet direct door, dat het goed zou zijn het begrip „uitdrukken in” eens precies te omschrijven. Ik meen daarom goed te doen er hier wat uitvoeriger bij stil te staan, ik neem er dan meteen het woord „formule” bij, dat verderop te pas komt. Een helder inzicht in de betekenis van beide termen kan de vaardigheid in het „letterrekenen” zeer verhogen, het gebleken verband met de functie moge daarom het volgende intermezzo rechtvaardigen.

Hetzelfde vraagstuk kan in verschillende formuleringen worden opgegeven, de ervaring leert, dat de moeilijkheid daardoor sterk wordt beïnvloed. We nemen eens het volgende voorbeeld:

Gegeven $\triangle ABC$ met hoogtelijn CD en bissectrice CE .

a) $\angle A = 80^\circ$, $\angle B = 40^\circ$; bereken $\angle DCE$.

- b) $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\alpha > \beta$; bereken $\angle DCE$.
- c) $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\alpha > \beta$; leid een formule af voor $\angle DCE$.
- d) $\alpha > \beta$; druk $\angle DCE$ in α en β uit.
- e) $\alpha > \beta$; bewijs, dat $\angle DCE = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

De volgorde is er een van opklimmende moeilijkheid, tussen *c*, *d* en *e* durf ik echter in dit opzicht niet te onderscheiden. In formulering *a* is het een vraagstukje voor de eerste klas, maar op de gebruikelijke plaats aan de zware kant, al zal de gemiddelde leerling misschien de oplossing vinden. Formulering *b* is voor hem te moeilijk en hetzelfde geldt voor de rest. Trouwens, leerlingen van hogere klassen lossen die niet in een handomdraai op, wie weten wil hoe een vijfdeklasser hier tegenover staat, geve maar eens het eindexamen-vraagstuk Trigonometrie 1930, 1 op. Dat de vraag *e* daar in trigonometrisch verband geplaatst is, schijnt een aanzienlijke verzwaring te betekenen; de frequentie van dit soort observaties doet mij sinds lang overtuigd zijn, dat falen van een leerling niet aan de beperktheid van zijn intellectuele vermogens in engere zin behoeft te worden toegeschreven, zolang zijn algemene geestelijke instelling hem zo zeer al bij de entree tot het vraagstuk in de weg staat. Met die vermogens lijkt het me nog al los te lopen, gezien ook de hoogte, waartoe de leerling receptief kan stijgen; de algemene instelling lijkt me echter alleen te beïnvloeden door die elementen in de denk-methode uitdrukkelijk naar voren te halen, die nu veelal onuitgesproken blijven.

Met formulering *e* op zich zelf is het trouwens een soortgelijk geval: principiëel is ze dezelfde als *b*, met het verschil, dat bovendien het antwoord gegeven is. De opdracht „bewijs” schijnt echter te suggereren, dat men voor zijn geestesoog een gehele, gegeven en gestelde verbindende, redenering moet zien verschijnen, voordat men een potlood op papier zet, met het gevolg, dat aan de hele oplossing niet begonnen wordt.

Zou *e* als stelling in het boek staan en dus „geleerd” moeten worden, of zou *c* in het boek zijn uitgewerkt met uitdrukkelijke vermelding, dat het verkregen resultaat een „formule” was, dan zou men bij overhoren kunnen rekenen op enkeler verzoek „nog eens uit te leggen”. Bij schriftelijke overhoring zou men stellig blanco blaadjes ontvangen met excuus „niet begrepen” of „niet kunnen leren”, terwijl dezelfde in gebreke blijvende auteurs bij plotseling opgeven van de principiëel identieke opgave *b* in elk geval het vraagstuk zouden aanpakken en mogelijk tot een goed einde brengen.

Er is dus alle aanleiding de leerling methodisch deze vraagstukken te leren behandelen. Dat dat al kan bij formulering *a* is een verhaal,

dat niet in dit verband past, ik wil aannemen, dat de leerling vraagstuk *a* kan oplossen, het gaat maar om het voorbeeld.

Allereerst noemen we nu *b* een *lettervraagstuk* en daarna (enige bladzijden verder in dit artikel zou ik zeggen direct) *het algemene vraagstuk* en we leren de discipel, mocht hij met het algemene vraagstuk geen raad weten, *er zelf door substitutie een getalvraagstuk van te maken, dat op te lossen en dan die oplossing met de letters op de voet te volgen.*

Wat *c* betreft, vertellen we hem, dat *de formule de uitkomst is van het algemene vraagstuk*, hij transponere *c* zelf in de formulering *b* en ga eventueel op *a* terug. Ook als een „formule” in zijn boek wordt „afgeleid”, trachten we hem er van te weerhouden die afleiding van buiten te leren, maar er toe aan te sporen, die formule te zien als een opgave hem gesteld met de facilitéit, dat hij bij elke stagnatie even kijken mag, hoe het verder gaat.

Aangaande *d* prenten we hem in, dat *uitdrukken in α en β wil zeggen: berekenen in de veronderstelling, dat α en β gegeven zijn*; daarmee is het vraagstuk tot formulering *b* herleid en weet hij, hoe verder te handelen.

Ten slotte vragen we hem, faalt hij bij *e*, waarom hij, die toch een antwoordenlijst zo zeer waardeert, zich niet meer erkentelijk toont, *nu het antwoord hem met het vraagstuk nota bene gegeven is.*

Dit alles doen wij vijf jaar lang en desnoods langer met elke leerling bij elk falen in enig vraagstuk, dat daartoe aanleiding geeft op onverschillig welk gebied niet alleen der wiskunde, doch ook van de natuurkunde en de mechanica.

Het zou het methodisch werken veel vergemakkelijken en bovendien veel doeltreffender maken, indien de leerboeken in hun vraagstukkenverzamelingen voortdurend verwante opgaven in de verschillende formuleringen combineerden, niet alleen in het begin dus, of nu en dan eens, maar stelselmatig bij elk nieuw gebied. In dit verband moge worden opgemerkt, dat de stukken „letter”-theorie, zoals die vooral in natuurkunde- en mechanica boeken veelvuldig voorkomen (ik denk bijvoorbeeld aan de calorimetrie en de beweging van een stoffelijk punt in een verticaal geplaatste cirkel) gevoeglijk kunnen verdwijnen. Ze bevatten toch eigenlijk niets dan het opgeloste algemene vraagstuk van het betreffende gebied en het is onzin een leerling dat te laten bestuderen, voordat hij nog aan de vraagstukken (die meestal aanvankelijk terecht zeer simpel zijn) begonnen is. Men kan er veilig op rekenen, dat het merendeel toch na studie van de opgegeven paragrafen juist met die passages als „niet begrepen” aan komt dragen, met het gevaar er bij, dat de

leerling, als hij er eindelijk achter is, de uitkomsten bij de eigenlijke vraagstukken als formule gebruikt en daar dus practisch niets van leert. Waarom ze niet weggelaten, of door enkele simpele getalvoorbeeldjes vervangen? Ik sla ze stelselmatig over.

Tot nog toe zijn er slechts dingen gezegd, die onmiddellijk in de les in practijk kunnen worden gebracht; ze hebben elk hun betekenis in de overbrugging van de kloof, die er is tussen het begin van de algebra en het functieonderwijs, toch staan ze min of meer los van elkaar. Ik kan niet overzien in hoever een volledige overbrugging mogelijk zal zijn, te dien aanzien heb ik eigenlijk slechts één desideratum te stellen, welks vervulling echter mogelijk zou maken al het reeds gezegde en wat nog komen moet onder één gezichtspunt te brengen, het tot een systematisch geheel te verenigen. Dat desideratum vraagt *het geven van een aparte naam aan de een getal voorstellende letter*.

In feite is van de „letter” een algebraïsch begrip gemaakt; ze heeft immers niet langer haar taalkundige betekenis als aanduiding van een bepaalde klank. Maar juist het feit, dat men dit begrip met het zo weinig algebraïsch aandoende woord „letter” moet blijven aanduiden, maakt, dat het eigenlijk maar een beetje op de achtergrond gehouden wordt, althans niet zo frequent en nadrukkelijk naar voren wordt geschoven, als ter voorbereiding van het functiebegrip wenselijk zou zijn.

Die nieuwe naam nu behoeft niet bedacht te worden, die *is* er, schijnt zich meerderen auteurs zelfs op te dringen. Vaak toch vindt men elk der woorden „constant”, „veranderlijk” en „onbekend” als adjectief toegevoegd aan het begrip „grootheid”, een woord, dat men in „strengere” leerboeken meestal niet tegenkomt, maar waar vele andere omheen draaien als een kat om de hete brij, met dit verschil dan, dat die kat dat doet omdat ze trek heeft in die brij. Het feit, dat het woord veelvuldig wordt gebruikt, zij het zonder nader omschreven te zijn (sommige leerboeken der differentiaalrekening gebruiken het zo van het begin af) wijst er op, dat het een wiskundige realiteit representeert en de mogelijkheid er zonder uit te komen heeft, didactisch althans, te minder te betekenen, naarmate men meer op zijn woorden moet letten om het te vermijden. Zelf gebruikte ik het in dit artikel tweemaal in de discussie van vraagstuk 3; voor het geval men dat zou bemerken, heb ik het excuus, dat men dat gebruik met wat goede wil zou kunnen beschouwen als grootheden uit de *meetkunde* betreffende (de normen zijn daar wat soepeler!) Een pover excuus natuurlijk, wanneer en zolang men een meetkundig vraagstuk algebraïsch behandelt, is men bezig met alge-

bra en de gehanteerde begrippen zijn algebraïsche. Intussen kost het moeite het woord uit de weg te gaan en veel verkieslijker lijkt het daarom het uitdrukkelijk de betekenis toe te kennen, die het blijkens het gebruik heeft en het in die betekenis de centrale plaats te geven, die nu aan het woord „letter” onthouden wordt. Dat wil ik dan ook doen, hetgeen niet impliceert, dat alles wat nog volgt, daarmee nu staat en valt.

Afgezien van een enkel geval, waarin het begrip grootheid in een speciale betekenis wordt gedefinieerd om diensten te bewijzen op beperkt terrein, brengt het gebruik mee, dat grootheden worden onderscheiden in veranderlijken en constanten, welke laatste twee dus tegenover elkaar staan. Het begrip „veranderlijke” is dan gewoonlijk niet al te nadrukkelijk omschreven; wil men dat wel, bijvoorbeeld in de definitie, die in het begin uit Kowalewski werd geciteerd, dan is het te verkiezen, in overeenstemming met het wiskundige gebruik, de constante te zien als bijzonder geval van de veranderlijke; grootheid en veranderlijke worden dan synoniem. Zo komen we tot de definitie: *Het symbool x (of welke andere letter ook) heet een grootheid, wanneer x elk element kan voorstellen van een gegeven verzameling getallen.*

Bevat die verzameling slechts één element, dan noemen we de grootheid een constante. Natuurlijk zal men ook elk der elementen van de verzameling als constante willen zien; welnu, er is niets op tegen een constante grootheid met het enige element van de definiërende verzameling te vereenzelvigen, evenals bijvoorbeeld bij de invoering der complexe getallen door middel van paren reële het getal $(a, 0)$ met het reële getal a geïdentificeerd wordt.

De termen „veranderlijke” en „grootheid” werden synoniem genoemd, ze zijn dat echter slechts formeel: geen mens zou er toch aan denken voor de „letter” meteen het woord „veranderlijke” voor te stellen. Inderdaad kan het zinvol zijn zelfs bij wiskundige termen gevoelsnuanceringen in de betekenis te onderscheiden, al zijn die niet voor wiskundige formulering vatbaar en dus slechts vaag te omschrijven; eigenlijk beweegt dit onderzoek zich grotendeels op dit sub-mathematische plan. Het is hetzelfde subtiële onderscheid, dat er ons toe brengt in $ax + b$ een functie van x en niet van a en b of van alle drie te zien; a en b suggereren constantheid, x veranderlijkheid. In ons onderwijs krijgen beide suggesties te sterke nadruk; ze uitwissen mag echter evenmin, daar men, ook al staat uitdrukkelijk voor ogen, dat a en b elk meerdere getallen representeren, toch in $ax + b$ een (algemene) functie van x kan willen blijven zien. In dat geval a en b ook „veranderlijken” te noemen is ongewenst, toch

moeten ze op de minste wenk bereid zijn in die rol over te gaan, terwijl ook x het offer zal moeten willen brengen zich op de eerste aanmaning met de rol van coëfficiënt (al weer zo'n woord!) te vergenoegen.

Het is duidelijk, dat het hier aspecten van één zelfde begrip betreft, die niet voor scherpe wiskundige onderscheiding vatbaar zijn. Wat wij onze leerlingen bij moeten brengen is de soepelheid, zich bij passende gelegenheden aan te sterke suggestie der symbolen te onttrekken, ze naar willekeur in ander aspect te zien. De weg daartoe is van de „letter” uit te lang, tenminste wanneer die niet uitdrukkelijker als algebraïsch begrip naar voren komt; de stap naar de „grootheid” zou hier echter brengen tot vlak voor het wisselspel der aspecten.

De term „grootheid” kan worden ingevoerd, zodra het begrip optreedt, dus zodra men een letter gebruikt ter aanduiding van een willekeurig getal. De definiërende verzameling behoeft geen struikelblok te zijn, misschien niet eens genoemd te worden; in alle formele rekenwerk omvat ze elk den leerling bekend getal, in speciale vraagstukken is ze vanzelf gegeven: is er sprake van a mannen, dan is het duidelijk welke waarden a wel en welke ze niet kan hebben. Vele leerboeken geven op hun eerste bladzijden als voorbeeld van het nut van letterrekenen hetzelfde vraagstuk enige malen met verschillende getal- en tot slot met lettergegevens. Hier is direct een natuurlijke gelegenheid het karakter der „grootheid” uit te laten komen, daarenboven treden al verschijnselen op, die de aspectwisseling plegen te begeleiden en waarop ook gewezen kan worden. Zo is er de trits willekeurig — elk — alle; het „algemene vraagstuk” als enkel vraagstuk en als inbegrip van „alle” vraagstukken; noemt men ook reeds de „formule” als uitkomst daarvan, dan is daarmee al een aanvang gemaakt tot de overgang naar de functie, zodra het gegeven als variabele wordt opgevat.

Met de formule kan hier wel worden volstaan, de functie kan men later plaatsen, waar men wil. Het woord al hier te noemen ware allicht praematuur, men kan er nog niets mee doen, alle formele rekenoefening moet nog komen. Intussen doet men goed, zich bij dit woord en het woord grootheid wel te realiseren, dat de leerling er geheel onbevangen tegenover zou staan; beide woorden zijn *alleen voor de leraar* belast met moeilijkheidsvoorstellingen; die trouwens heel wel een reële grond kunnen hebben bij de gebruikelijke behandeling. Maar de moeilijkheid zit toch niet in het *woord*, en de *begrippen* zijn op bladzijde 2 van het algebraboek reeds volledig present!

Bij het invoeren en oefenen der bewerkingen is natuurlijk weinig gelegenheid het functiebegrip te verdiepen, het komt daar op onderhouden aan. Het gebruik van de naam „grootheid” zou hier stellig een grote conserverende werking hebben en door alle formele rekenwerk heen het besef van de ware aard der symbolen dermate levendig houden, dat er later meteen bij zou kunnen worden aangeknoopt. Substitutieoefeningen kunnen die werking versterken, het begrip „algemeen” kan nu en dan eens opduiken en speciaal kan al eens worden onderzocht voor welke waarden der optredende grootheden zekere bewerkingen niet doorgaan. De discussie van algebraïsche vormen wordt vermoedelijk te weinig systematisch bedreven, de leerlingen blijven er dikwijls tot het eind mee sukkelen. Een opgave bijvoorbeeld als de eerste vraag van eindexamenvraagstuk algebra 1929, 2 wordt zelden door vijfdeklassers zelfstandig correct opgelost, dikwijls kunnen ze zelfs het systematisch opsporen van de uitzonderingswaarden der parameters niet eens volgen, hoewel daartoe in principe niets nodig is dan het juiste inzicht van wat in de eerste helft van de eerste klas geleerd is.

Intussen is met zo'n onderzoek eigenlijk al de overgang gemaakt tot het onderwerp der „ingeklede vergelijkingen”, als we met deze naam elk vraagstuk aanduiden, waarbij het gevraagde gevonden moet worden door het opstellen en oplossen van een vergelijking. We komen daarmee op een terrein, waarover ik ter afronding nog enige opmerkingen in petto heb.

De vergelijking geeft volop gelegenheid tot verdieping van het grootheidsinzicht en omgekeerd komt dat verdiepte inzicht het hanteren van de methode der ingeklede vergelijking ten goede.

Allereerst ontmoeten we hier dan eindelijk onze oude bekende: de onbekende. Volgens de meest gangbare en mijns inziens juiste opvatting wordt de vergelijking gezien als *een voorwaarde, die aan de onbekende is opgelegd*; aan de voorwaarde is *de opdracht* verbonden, *de waarden van de onbekende te bepalen, waarvoor ze vervuld is*. Met de „onbekende” wordt blijkbaar niet de „wortel” bedoeld, dat is de gezochte „waarde” van de onbekende. Op de vraag, wat de onbekende dan wel is, hoeft het antwoord niet ver gezocht te worden, de term „waarde” in dit verband doet ons direct zien, dat de onbekende niets anders is dan de „grootheid”, en wel *verkerend in het speciale geval, dat er een voorwaarde aan is opgelegd, waardoor de definiërende verzameling wordt beperkt, terwijl tevens de resterende deelverzameling moet worden bepaald*. Het woord „onbekende” mag weer niet letterlijk worden genomen, de grootheid zelf is bekend.

genoeg. Terloops worde opgemerkt, dat vrezers van het woord „grootheid” mogen bedenken, dat ze met het woord „onbekende” of de letter „ x ” (elk leerboek noemt immers „ x ” de onbekende) hetzelfde doen als hier voor „grootheid” wordt voorgesteld, behalve dan, dat daarbij veel in 't duister blijft, wat heel goed licht verdragen kan.

De vergelijking, die de aan de grootheid opgelegde voorwaarde tot uitdrukking brengt, kan een meer omvattende verzameling suggereren dan die waarvoor de grootheid werkelijk is gedefinieerd; gaat het bijvoorbeeld over x mannen, dan is de definiërende verzameling blijkbaar die der aantallen, een lineaire vergelijking suggereert echter de verzameling der reële getallen. Deze beschouwing verheldert dus in bepaalde gevallen het optreden van wortels, die „niet voldoen”, zoals zich dat bijvoorbeeld in de mechanica veelvuldig voordoet. Natuurlijk volgt de mogelijkheid van zulke wortels ook uit een noodzakelijkheidsbeschouwing van de opgelegde voorwaarde, deze is trouwens algemener en wordt door het voorgaande niet overbodig gemaakt.

De ingeklede vergelijking geeft nu dikwijls tweeërlei moeilijkheid: *ten eerste* schijnt het lastig *het type als zodanig te herkennen*; in de *tweede* plaats komt dan nog *het opstellen van de vergelijking*.

In verband met het laatste gedenk ik dankbaar een korte passage in het „Leerboek der Algebra” van Dr. A. van Thijn, aan de hand waarvan ik mijn eerste onderwijs in de algebra gaf. Het betreft maar een paar regels, doch in kiem bevatten ze het meeste van wat ik tot nu te berde bracht. Het komt er op neer, dat het opstellen van de vergelijking *bestaat in het nemen van de proef op de som met de uitkomst x* . Voor een voorbeeld wordt de pagina in tweeën verdeeld, rechts lezen we: „Stel het aantal der mannen = $x \dots$ ”; links: „Onderzoeken wij of er misschien 8 mannen geweest zijn; er waren dan $\dots$ ” Inderdaad, als we zeggen: „Stel het aantal mannen = x ”, dan *veronderstellen* we dat in onze volgende redenering, dan *is* dat aantal mannen eenvoudig x , en laat ons nu maar eens zien of het klopt! Waar het zou moeten kloppen, staat de vergelijking.

Het komt me voor, dat met deze methode van Thijn de tweede moeilijkheid volledig is opgelost: het opstellen der vergelijking komt blijkbaar neer op het oplossen van een vraagstuk in tegen-gestelde richting. Men beschouwt immers het aantal mannen als *gegeven*, en berekent dan, „drukt daarin uit” het getal, dat *inderdaad* gegeven is. Dat vraagstuk draagt een *algemeen* karakter, omdat het gegeven door een letter wordt voorgesteld; het voorbeeld van van Thijn brengt er meteen toe dit algemene vraagstuk op te lossen

naar analogie van een getalvoorbeeld. Is de vaardigheid groot genoeg, dan kan dat natuurlijk worden overgeslagen, van belang lijkt echter, dat de idee: *het opstellen van de vergelijking bestaat uit het oplossen van een algemeen, in tegengestelde richting verlopend vraagstuk*, helder voor ogen blijft.

Hierop doordenkende zien we, dat ook het pad door de eerste moeilijkheid daardoor al beter begaanbaar geworden is en zelfs voor verdere effening vatbaar kan zijn, namelijk in die eenvoudiger gevallen, waarin dat algemene vraagstuk het karakter van een *directe*, (d.w.z. zonder het opstellen van een 'vergelijking uitvoerbare) *berekening* draagt. De tweede klas krijgt het dadelijk na Pythagoras wel klaar de hoogtelijn van een gelijkzijdige driehoek in de zijde uit te drukken; het omgekeerde wil wel eens stokken. Het eerste presenteert zich als een „natuurlijk”, een „direct”, het tweede als een „omgekeerd”, een „teruglopend” vraagstuk; maakt men uitdrukkelijk deze onderscheiding, dan kan men de leerling er toe brengen te denken: „Ik kan niet de zijde uitrekenen, als de hoogte gegeven is; ik kan wél de hoogte uitrekenen als de zijde gegeven is; doe ik het laatste, dan krijg ik een vergelijking voor de zijde”. Het vraagstuk wordt dus eenvoudig omgekeerd.

Elke formule, die een meetkundige of natuurkundige grootheid in één of meer andere uitdrukt, is te gebruiken als vergelijking voor elk dier andere als onbekende; door oplossing kan de onbekende in de rest worden uitgedrukt. De standaardformules zijn grotendeels zelf oplossing van een algemeen vraagstuk, waarin het rekenkundig verband der optredende grootheden op de meest natuurlijke wijze aan de orde is gesteld. Wordt gevraagd een grootheid in andere uit te drukken, dan geeft een methodische onderscheiding van „directe” en „omgekeerde” vraagstukken aanleiding tot een systematisch zoeken naar die grootheid, onverschillig of ze gevraagd of gegeven is, die zich in verband met de aard van het vraagstuk het natuurlijkst in de overige laat uitdrukken.

Er is weer enige willekeur van opvatting mogelijk over de vraag, wanneer de grootheid nu precies het karakter van een onbekende krijgt. Men kan stellig verdedigen, dat dit onmiddellijk geschiedt na het uitspreken van de aanhef: „Stel . . . x ”, de grootheid is daarmee onderworpen aan de voorwaarde van het vraagstuk, ook al is die nog niet in de vorm van een vergelijking gegoten. Wordt echter, zoals boven, het opstellen van de vergelijking min of meer uitdrukkelijk als zelfstandig onderdeel opgevat, dan wordt x pas onbekende, wanneer de vergelijking is opgesteld. Dat onderdeel is dan immers een apart algemeen vraagstuk, waarin x in algemeen groot-

heidskarakter optreedt. Daarbij kan dan naar behoefte het constantheidskarakter naar voren komen. De „veranderlijke” kan op de achtergrond blijven, tenzij men, wat op de duur meermalen zal gebeuren, de vergelijking uitdrukkelijk als *functievraag* wenst op te vatten; haar karakter als *grootheidsvraag* verandert daarbij niet, men blijft immers vragen naar zekere waarden van de onafhankelijk veranderlijke.

Hiermede is dan de cyclus der aspecten constant, veranderlijk en onbekend van het algemene grootheidsbegrip gesloten. Ze kunnen vervagen tot haast volkomen synonymie met elkaar en met de grootheid, men kan ze prononceren tot uitdrukkelijke onderscheidenheid. Hetzelfde doet zich voor bij de corresponderende begrippen formule, functie, vergelijking; het woord formule is formeel steeds toepasselijk, men kan de formule tot functie of vergelijking maken door één of meer der optredende grootheden als variabele of onbekende aan te wijzen.

Zo komen we weer terug tot het bij de vraagstukken 2 en 3 opgemerkte; daar immers bleek het opstellen van de functie een apart lettervraagstuk te zijn; men ziet nu, dat het hetzelfde is als het hier „direct vraagstuk” genoemde. Het is dus geen wonder, dat de oplossing met dezelfde aanhef begint. Het onderscheid komt in het tweede gedeelte: dat gaat dáár de functiekant op, hier wordt de formule vergelijking.

Het is natuurlijk niet de bedoeling deze beschouwingen de leerling in onverdunde vorm voor te zetten, het moet echter mogelijk zijn hem door geschikte oefeningen te leren de bijbehorende standpuntsveranderingen zonder moeite, als het ware van zelf, te volbrengen. Daarvoor is een geoefend onderscheidingsvermogen nodig en speciaal moet hij van het begin af goed weten, wat een vergelijking is. Daarom behoren in de definitie direct het karakter van de vergelijking als opgelegde voorwaarde en dat als opdracht tot oplossing beide uit te komen. Elke andere definitie is af te keuren, in het bijzonder die, waarin de vergelijking een „gelijkheid” genoemd wordt; zo vond ik in een leerboek: „Een vergelijking is een gelijkheid van twee algebraïsche vormen, die alleen geldig is voor een beperkt aantal waarden van de daarin voorkomende letter of letters.”

Scherpend voor het onderscheidingsvermogen is voorts het gebruik van een apart vergelijkingsteken (uit te spreken: „moet gelijk zijn aan”), terwijl daarentegen het gelijktteken het begrip voor de vergelijking spoedig doet slijten. Ik gebruik in de les dan ook telkens, wanneer dat begrip moet worden opgefrist, het teken dat Dr.

Wansink in zijn leerboek heeft ingevoerd, maar kan het moeilijk systematisch doen en laten doen, nu het gebruikte leerboek het niet heeft. Ik zou het zeer toejuichen, als Dr. Wansink daarin door de overige leerboeken werd nagevolgd. De redenen, waarom dat niet gebeurt, liggen vermoedelijk op het gebied van de ethiek der leerboekschrijverij, een terrein, dat ik nu niet wil betreden, al moet ik zeggen, dat ze me niet schijnen op te wegen tegen de grote dienst, die aan ons onderwijs door algemene invoering van het teken zou worden bewezen. Ik zag het trouwens in Euclides wel door anderen gebruikt en ook elders kan men het tegen komen, zo vond ik het weer in Hasse's Höhere Algebra (1926).

Hetzelfde voordeel zou verbonden zijn aan het speciale teken voor de „ongelijkheidsopgave” (het voor de hand liggende woord „verongelijking” werd zeker om begrijpelijke redenen verworpen); misschien is dat echter minder urgent en ook is het bezwaar te billijken tegen het nieuwe er aan verbonden woord: het ligt niet direct op de weg van het onderwijs termen te introduceren, die in het wetenschappelijk verkeer niet gangbaar zijn. Van tekens zou men hetzelfde kunnen zeggen: welnu, men zou het gebruik van het teken af kunnen laten lopen, zodra het begrip vergelijking geacht kan worden er goed in te zitten.

Naast het woord „vergelijking” moge er enige aandacht geschonken worden aan het woord „betrekking”. Het wordt aanvankelijk meestal zo sporadisch gebruikt, dat een leerling, die zich plotseling voor de opdracht: „zoek de betrekking, die . . .” gesteld ziet, kan menen het woord nooit eerder gehoord te hebben.

Formeel kunnen vergelijking en betrekking wel als synoniem gelden, het zijn beide beperkende voorwaarden, aan één of meer grootheden opgelegd. In het gebruik zijn er echter verschillen: men zal in een betrekking zelden de letters x en y zien voorkomen, meestal treden er ook meerdere grootheden in op. Bovenal echter mist de betrekking het karakter van opdracht tot oplossing. Het woord is als geknipt om aan te geven, dat grootheden op elkaar „betrokken” zijn, elkaar wederzijds in hun bewegingsvrijheid belemmeren. De „vergelijking van een kromme” is dan ook eigenlijk een betrekking en het is jammer, dat de analytische meetkunde zich op het eerste woord heeft vastgelegd. Het wordt daardoor dubbel belast, wat de doorzichtigheid der stof niet ten goede komt. Ter compensatie moge de „betrekking” veelvuldiger ten tonele worden gevoerd.

Ten slotte nog een woord over een ander onderwerp: spreekt men in de algebra van evenredige afhankelijkheid (van grootheden, mag men nu gerust zeggen) en dat is zeker gewenst, dan is het duidelijk,

dat die hier ongedwongen ingepast kan worden en een fikse stap kan betekenen in de richting van goed functieinzicht. Is het woord functie nog niet gevallen, dan is het hier de geschikte plaats het in te voeren.

Zolang het tot nu gezegde niet in een leerboek volledig wordt uitgewerkt, heeft het weinig zin te onderzoeken, hoe het eigenlijke functieonderwijs het best er op kan aansluiten. De vele toegangswegen tot de functie geven stellig meerdere mogelijkheden. In elk geval kunnen, wanneer men daar aan toe is, de fundamentele begrippen zo goed bekend zijn, dat het onderwerp nauwelijks nadrukkelijk als iets nieuws aan de orde behoeft te worden gesteld.

Wat de juiste plaats van introductie van de *functieterminologie* betreft, daarover zou ik helemaal niet willen denken. De terminologie komt vanzelf, komt ook vanzelf op haar juiste plaats en in haar juist karakter: dat van een dichterlijke vrijheid, beeldend en suggestief, in essentie wáár misschien, doch zonder exact te omschrijven betekenis.

En hiermee heb ik dan wel ongeveer naar voren gebracht, wat me bij de formulering van mijn derde programpunt voor ogen stond. Het moge nieuw licht geworpen hebben op de vraag, of het functiebegrip voor de leerling moeilijk is.

Zo'n vraag heeft zelden een absolute zin, het antwoord kan alleen gegeven worden van het complex van voorstellingen uit, dat de beoordeelaar dienaangaande bezit. „Moeilijkheid” is niet een eigenschap van een begrip op zich zelf, alles hangt af van de weg er heen. Ten tijde van Archimedes was inhoudsberekening genieënwerk en zei niet Leibniz, dat ¹⁾ „seine Methode es der Mittelmäßigkeit ermögliche, die Probleme anzugreifen, die bisher nur hochbegabten zugänglich gewesen seien”?

Het functieonderwijs, zoals het nu gegeven wordt, is inderdaad moeilijk; mijn ruim tienjarige ervaring met het in het vorige artikel besproken dictaatje heeft mij echter geleerd, dat deze moeilijkheid *zit in de kromme*, dus in de toepassing van de algebra op de meetkunde, ze betreft inzonderheid de *relatie* tussen beide, de *correspondentie* tussen meetkundige bijzonderheden van de figuur en algebraïsche van de vergelijking. Maar een speciale *functie*-moeilijkheid is dat *niet*.

Aan de andere kant heb ik verscheidene van de hier gegeven wenken ook al jaren in de practijk beproefd; ze zijn steeds vereenvoudigingen in de uitleg gebleken. Toen ik op de leidende ge-

¹⁾ Zo bij A. Voss, in zijn rede „Über das Wesen der Mathematik”.

dachten van dit artikel begon te komen, heb ik ze meteen toegepast, het resultaat was bepaald verrassend, het bleek, dat althans in de les elke leerling zo ver te krijgen was, dat hij de functie tot in de grond begreep. Een systematische opbouw van meet af aan heb ik natuurlijk niet kunnen beproeven, het leerboek daartoe ontbreekt trouwens.

Wat nu in eerste instantie gebeuren moet, is in het vorige artikel gezegd: meetkunde en functieleer moeten worden gescheiden, de moeilijkheid van de laatste kan dan opnieuw bekeken en zuiverder bepaald worden. Dat die dan niet zo heel groot meer behoeft te zijn meen ik nu te hebben aangetoond, zelfs zal het voorgestelde aanzienlijk bij kunnen dragen tot vermindering ook van de meetkundige moeilijkheden; het „veranderlijke” karakter van de coördinaten is dan alvast vertrouwd.

Misschien doe ik goed nog even te recapituleren. Allereerst merk ik op: zo inderdaad van moeilijkheid van het *eigenlijke* functiebegrip kan worden gesproken, is die gelegen in het feit *dat een letter verschillende getallen als het ware tegelijk kan voorstellen*. Dat brenge men dus van het begin af bij en houde daarna dit besef levendig.

Verder worden vele moeilijkheden juist gecreëerd door de pogingen ze te omzeilen, daartoe reken ik vooral het introduceren van de functie als *iets nieuws*, daarbij uitgaande van de *letterlijk genomen terminologie*. Geleidelijke ontwikkeling van het functiebegrip is mogelijk door van de aanvang af de functie slechts te zien als de *uitkomst*, de *waarde* van een lettervorm. Het is te oefenen door:

- a. systematische omschrijving van begrippen als: formule, betrekking, uitdrukken in, algemeen vraagstuk, algemene vorm of vergelijking;
- b. oefeningen in het discussiëren van vormen en vergelijkingen waarin letters optreden: wanneer zijn ze wel, wanneer niet gedefiniëerd, wanneer vals of identiek enz.;
- c. wijzen op het meervoudskarakter van vormen of vergelijkingen met lettercoëfficiënten;
- d. scherp inprenten van het karakter der vergelijking als te vervullen voorwaarde;
- e. toepassing van de functionele gedachte in deze zin in meetkunde, mechanica en natuurkunde.

Dit alles is incidenteel onmiddellijk toe te passen, doelbewust en systematisch lijkt het me alleen mogelijk, indien uitdrukkelijk het begrip centraal gesteld wordt, dat ik „grootheid” genoemd heb. Mij althans schijnt zich alles zo natuurlijk rondom dit begrip te groeppen, dat ik er niet aan twijfel, of het verdient die centrale plaats. Als

toch alles vastzit op het gerepresenteerd zijn van verschillende getallen tegelijk door één symbool, dan *is* dat begrip eenvoudig centraal en hoe wil men dan ontkomen aan een speciale naam er voor? Wat op de naam „letter” tegen is, heb ik al gezegd, het is trouwens niet steeds een letter, er hangt ook wel eens een index aan en soms is het een vorm. Dat het woord „grootheid” niet in een goede reuk staat, komt eenvoudig omdat men verzuimd heeft het uitdrukkelijk te legaliseren inplaats van het te vermijden, welnu, dat is alles wat hier wordt voorgesteld. Een voordeel zou verder zijn, dat de schoolwiskunde zo een strenge basis legde voor het ongedefinieerd gebruik in leerboeken over hogere onderwerpen (al zullen dat meest oudere zijn). Zou men willen tegenwerpen, dat het woord toch eigenlijk gereserveerd moet blijven voor de algemene fysische (inclusief meetkundige) grootheden, dan kan geantwoord worden, dat de algebraïsche grootheid niet alleen van die alle de getalabstractie is, maar bovendien als dimensieloos exemplaar tot hun verzameling behoort. Krachtens de goede traditie der wiskundige naamgeving kan het op beide gronden op deze naam zelfs aanspraak maken. Historisch heeft toch immers het letterrekenen zich uit het rekenen met fysische grootheden ontwikkeld, het nog in de algebra voorkomende woord is een relict uit de tijd, dat men werkelijk bij elke letter een daardoor voorgestelde fysische grootheid in gedachten had. Didactisch maakt men trouwens hiervan wel gebruik door de letter aanvankelijk als afkorting van zo’n grootheid in te voeren.

Hoe het zij, is eenmaal het begrip centraal gesteld, dan is het in bovengenoemde punten samengevatte van één gezichtspunt uit toe te passen, doordat het mogelijk wordt de leerling te oefenen

- f. in het hanteren der grootheid in de wisselende aspecten van constante, onbekende en veranderlijke, en de daarmee corresponderende overgangen van de formules in vergelijking of functie.

In het vorige artikel (p. 64) vroeg ik me af, hoe de daar getekende situatie ontstaan kon zijn; ik zocht de oorzaak in het coördinatenbegin van de leerboeken der differentiaalrekening en opperde de mogelijkheid van een verdere zelfstandige ontwikkeling in de verkeerde richting. Nu is het stellig waar, dat de schoolwiskunde in zekere zin een zelfstandig bestaan heeft en zich zelfstandig ontwikkelt, de toen gesignaleerde excessen komen zeker voor rekening van die ontwikkeling; verder zal de overeenkomst met de genoemde leerboeken hier conserverend gewerkt hebben.

Die overeenkomst echter als *oorzaak* te zien, het proces dus als een

soort verwatering en verbastering van oorspronkelijk zuivere begrippen, lijkt me nu volstrekt onhistorisch gedacht. Het is toch veel eer zo, dat leerboeken als de genoemde zelf product zijn van een wetenschappelijke ontwikkeling naar steeds groter helderheid, en dat die ontwikkeling door de school gevolgd wordt, zij het op een afstand, maar in de goede richting.

Historisch ben ik helaas te weinig onderlegd om hier stellige uitspraken te doen, ik moet het bij gissingen laten; misschien wil een historicus ons eens precies vertellen, hoe het functiebegrip zich ontwikkeld heeft. Vast staat, meen ik, echter wel, dat de kromme er was voor de functie, de eerste krommen werden kinematisch, althans als in de tijd voortgebracht gedacht. Zulke figuren werden arithmetisch onderzocht, in deze onderzoekingen ligt de oorsprong van analytische meetkunde en functieleer beide; ze zijn aanvankelijk stellig niet onderscheiden. Men kan zich voorstellen, dat die onderscheiding zich langzamerhand meer begon af te tekenen, naarmate bij het ene onderzoek gezocht werd naar arithmetische beschrijving van meetkundige eigenschappen, bij het andere de figuur daarentegen gezien werd als illustratie van het rekenkundig verband van grootheden. Ook toen die scheiding definitief voltrokken werd, zal ze toch, wat de gemeenschappelijke wortel betreft, min of meer in het formele zijn blijven hangen, zoal niet bij de grote scheppende voorgangers, dan toch (tot op de huidige dag) bij de grote massa der wiskundigen, die deze vakken enkel *leerden*.

Psychologisch is dit aannemelijk, het komt er immers maar op aan, onder welk *aspect* men de kromme ziet, in haar wiskundige definitie komt echter dat aspect niet voor. Dit zou, wat de functieleer betreft, mogelijk het geval hebben kunnen worden, als het argument als het eerst-aanwezige gezien was en de functie als daaruit afgeleid; de eerste functie-onderzoekingen hebben echter twee *grootheden* met elkaar in verband gebracht, die in de wetenschappelijke vertrouwddheid er mee gelijkwaardig waren, hetgeen overeenkwam met de gelijkwaardigheid van twee coördinaten.

Gezien de kinematische oorsprong van de functieleer zal ongetwijfeld de tijd de eerste onafhankelijk variabele geweest zijn; daaraan danken we stellig de voorstelling van een veranderende en een mee veranderende grootheid. Het besef van gelijkwaardigheid schijnt evenwel ongeschokt gebleven te zijn, misschien wel doordat later ook grootheden als volume en druk in functioneel verband gezien werden, waarvan het weinig zin had één als genetisch primair te beschouwen.

Heeft dus de functie in statu nascendi gediend om de kromme te

beschrijven, geleidelijk zijn zo de rollen omgekeerd. Dat daarbij de grafiek nuttig geweest is in al die gevallen, waarin men werkelijk een overzicht wenste van de bijéén horende waarden van twee grootheden, spreekt vanzelf, ook heeft ze in zulke gevallen zeker het inzicht in het functioneel verband zeer bevorderd.

Zo gezien zal dus het functiebegrip der school bij zijn ontwikkeling in voorstellingen uit vroeger eeuwen zijn blijven hangen, dit zal bevorderd zijn door het parallele verschijnsel in de toegepaste wiskunde, waar deze voorstellingen zich immers zijn *blijven* opdringen, en waar ook de drang tot verhelderende verdere abstractie daardoor niet sterk gevoeld zal zijn.

Wat de zuivere analyse betreft, de critische periode van de vorige eeuw heeft het functiebegrip streng arithmetisch gedefinieerd, daaruit de letterlijke veranderlijkheidsgedachte geëlimineerd en het los gemaakt van de meetkundige afbeelding, zowel als van de physische groothedsvoorstelling. In de leerboeken van een veertig, vijftig jaar terug schijnen deze drie aspecten me nog vrij sterk te leven, in de moderne strenge wiskundebeoefening zijn ze echter geen van drieën meer essentieel. Het eerste heeft volledig afgedaan, behalve in de terminologie, het tweede en derde leven echter *traditioneel* nog voort: vele leerboeken der analyse beginnen plichtmatig direct de functie graphisch te illustreren, ook waar dat voor het begrip onnodig is (dat het *in het geheel* niet nodig is, bewijst het boek van Landau!); een rudiment van het laatste zie ik in de definitie-aanhef: „Men noemt y een functie van x , wanneer . . .” Het is, alsof y er al *is* en nu met x in verband wordt gebracht; inplaats van dat er op x een operatie wordt toegepast, waarvan het resultaat y genoemd wordt.

In dit opzicht heb ik Kowalewski in het begin van dit artikel tendentieus geciteerd; na de definitie van een veranderlijke, die ik naar de inhoud correct weergegeven heb, volgt er letterlijk:

„Wenn jedem Wert der Veränderlichen x ein bestimmter Wert der Veränderlichen y entspricht, so nennt man y eine *Funktion* von x und schreibt $y = f(x)$. (. . .).

Wenn jedem Wert der Veränderlichen x eine Zahl zugeordnet ist, so ist in dem Bereich von x eine Funktion definiert; denn die zugeordneten Zahlen kann man als die Werte einer Veränderlichen y betrachten”.

De eigenlijke definitie staat in de eerste alinea, ze spruit onmiddellijk voort uit de klassieke opvatting van de functie als relatie tussen gelijkwaardige grootheden; van de „genetische” opvatting in de tweede alinea wordt *bewezen*, dat ze tot de eerste kan worden herleid. Voor Kowalewski schijnt de eerste opvatting dus wel de

essentiële te zijn. Ik durf hem dat niet als zonde aan te rekenen, misschien ben ik nu namelijk naar de andere kant te tendentius: hoewel bijvoorbeeld bij de elementaire functies de genetische opvatting de zuiverste is, wijst een impliciet functieverband al weer meer op gelijkwaardigheid der variabelen. Wel behoeft daarmee bij de grondleggende definitie niet te worden gerekend en zou zelf later geen aparte aanvulling daarvan nodig zijn. De aanpassing geschiedt vanzelf: één van de gelijkwaardige variabelen wordt als onafhankelijke aangewezen en de andere vloeit daaruit genetisch voort.

Hoe het ook zij, in het „aanvoelen” der functie zijn alle drie aspecten *springlevend*. Dat betekent, dat in het geestesleven van vele wiskundigen de strengheid een peripherisch verschijnsel is; misschien kan men beter zeggen, dat er een kloof bestaat tussen hun wiskundig denken en hun denken over wiskunde. De didactiek moet het grotendeels hebben van het laatste, er is dus blijkbaar voor haar in dit opzicht nog wel werk te doen. Daarop wijst het feit, dat deze drie aspecten van het intuïtieve functiebeeld enkel uit traditie *gehouden zijn voor drie moeilijkheden van het functiebegrip*, die de gebruikelijke behandeling als noodzakelijk deden zien, maar die sinds de volledige formalisatie van het functiebegrip *als schijn ontmaskerd* hadden kunnen zijn. Daartoe was enkel nodig het *ernstig nemen*, het in het onderwijs doortrekken van de gedachten, die men in het wetenschappelijk werk vanzelfsprekend vindt.

Tot slot een praktische opmerking: het komt me voor dat het leerplan op dit punt een deel van zijn zin verloren heeft.

Wat de functieleer betreft, geeft het eigenlijk alleen nog de omvang aan, die het functieonderwijs in speciale zin behoort te hebben, en verder kan men vinden, dat het nog steeds de grafiek als illustratie van de functie voorschrijft. Het bijbrengen van het functiebegrip kan evenwel in klas I beginnen, al noemt het program het daar niet, en het is wenselijk dat het zich op natuurlijke wijze ontwikkelt. Mijn dictaatje uit het vorige artikel was uiteraard een noodoplossing, het is trouwens te hopen, dat het hele artikel spoedig verouderd is: een natuurlijke ontwikkeling eist geenszins een stuk analytische meetkunde, voordat de grafiek gepresenteerd kan worden. Men houde ook wel in het oog, dat het program met de grafiek bedoelde het eerste functieinzicht te vergemakkelijken; de door mij gewenste situatie zou juist andersom zijn: het aanwezige functieinzicht zou de grafiek moeten doen begrijpen; ik ontken niet, dat men er later, bijvoorbeeld bij de differentiaalrekening, weer nut van heeft in omgekeerde zin.

Een andere vraag is: zal men op de H.B.S. de beginselen der analytische meetkunde blijven onderwijzen en zo ja, in welke omvang? Die vraag aan het leerplan te stellen, heeft geen zin, ik leg ze voor aan allen, die zich geroepen weten in zulke dingen leiding te geven. Zelf heb ik niets voor te stellen, mijnentwege schrapt men het gehele onderwerp. Wil men het behouden, dan is er stellig aardiger werk dan de parabool met verticale as, de cirkel zou bijvoorbeeld verre te prefereren zijn. Ook zouden zij, die stelsels vergelijken van hogere graad meetkundig plegen te illustreren, dat op meer bevredigende wijze kunnen doen; ook daar wordt wel eens wat gekronkeld om tot de „grafiek” te komen!

Haren (Gron.), April 1949.

KORREL C.

DE OMKERING VAN DE STELLING VAN KÖNIG EN VAN DIE VAN HET IMPULSMOMENT

door

Dr H. J. E. BETH.

I. De stelling van König zegt, dat de kinetische energie van een stoffelijk stelsel gelijk is aan de som van die van een translatie met het zwaartepunt Z mee, indien in Z de gehele massa verenigd wordt gedacht, en die van de beweging ten opzichte van Z . Nu is het onmiddellijk duidelijk, dat Z niet het enige punt behoeft te zijn met de in de stelling genoemde eigenschap; deze bezit ook elk punt, dat op het beschouwde tijdstip geen snelheid heeft. Men vraagt nu de verzameling van alle punten A , die die eigenschap bezitten.

Zij O een punt van de vaste ruimte, genomen als oorsprong, en $\underline{r}$ de plaatsvector van een willekeurig punt van het stelsel, met massa m . Dan geldt voor de kinetische energie L van het stelsel:

$$L = \sum \frac{1}{2} m \dot{\underline{r}}^2$$

Zij verder A een punt met de boven genoemde eigenschap en $\underline{\rho}$ de plaatsvector van een willekeurig punt van het stelsel ten opzichte van A , dan geldt ook, als M de totale massa is:

$$L = \frac{1}{2} M \dot{\underline{r}}_A^2 + \sum \frac{1}{2} m \dot{\underline{\rho}}^2.$$

Dus

$$\Sigma m \underline{\dot{r}}^2 = M \underline{\dot{r}}_A^2 + \Sigma m \underline{\dot{\varrho}}^2.$$

Daar

$$\underline{r} = \underline{r}_A + \underline{\varrho}, \text{ dus } \underline{\dot{r}} = \underline{\dot{r}}_A + \underline{\dot{\varrho}} \text{ is,}$$

geldt

$$\Sigma m \underline{\dot{r}}_A^2 + 2 \Sigma m \underline{\dot{r}}_A \cdot \underline{\dot{\varrho}} + \Sigma m \underline{\dot{\varrho}}^2 = M \underline{\dot{r}}_A^2 + \Sigma m \underline{\dot{\varrho}}^2.$$

Daar $\Sigma m \underline{\dot{r}}_A^2 = M \underline{\dot{r}}_A^2$ is, luidt de voorwaarde, waaraan de punten A moeten voldoen:

$$\Sigma m \underline{\dot{r}}_A \cdot \underline{\dot{\varrho}} = 0.$$

Of:

$$\underline{\dot{r}}_A \cdot \Sigma m \underline{\dot{\varrho}} = M \underline{\dot{r}}_A \cdot \underline{\dot{\varrho}}_Z = 0.$$

Hieraan kan op drie manieren voldaan worden:

$$1^\circ \quad \underline{\dot{r}}_A = 0 \qquad 2^\circ \quad \underline{\dot{\varrho}}_Z = 0 \qquad 3^\circ \quad \underline{\dot{r}}_A \perp \underline{\dot{\varrho}}_Z.$$

Het eerste zegt, dat elk punt, dat op dat ogenblik geen snelheid heeft, tot de punten A behoort. Het tweede, dat elk punt er toe behoort, waarvan de snelheidsvector gelijk is aan die van Z; tot deze punten behoort Z zelf. Het derde, dat elk punt er toe behoort, waarvan de snelheidsrichting loodrecht is op de snelheidsrichting van Z ten opzichte van het punt (dus die van het punt ten opzichte van Z).

Bepalen we ons nu tot het geval, dat de punten een *onveranderlijk vlak stelsel* vormen, dat zich in zijn vlak beweegt. De snelheidsverdeling is dan die van een rotatie om het tijdelijk rotatiecentrum C. Het punt, dat de plaats van C inneemt, is het enige zonder snelheid, dus het enige, dat krachtens 1° tot de punten A behoort. Het onder 2° genoemde bepaalt alleen het punt Z zelf, omdat er hier geen tweede punt is met dezelfde snelheidsvector. Beschouwen we nu het onder 3° genoemde. De snelheidsrichting van A is loodrecht op AC, die van Z ten opzichte van A is nu loodrecht op ZA; dus moeten AC en AZ loodrecht op elkaar staan. Dus:

De meetkundige plaats van de punten A voor een onveranderlijk vlak stelsel is een cirkelomtrek, die het lijnstuk, dat zwaartepunt en tijdelijk rotatiecentrum verbindt, als middellijn heeft.

II. De tweede stelling zegt, dat de fluxie van het impulsmoment van een stoffelijk stelsel ten opzichte van een punt van de vaste ruimte gelijk is aan de som van de momenten van de uitwendige krachten ten opzichte van dat punt. Bekend is, dat dezelfde stelling

geldt, als de momenten genomen worden ten opzichte van het zwaartepunt Z van het stelsel. We vragen naar de verzameling van alle punten B van het stelsel, waarvoor de stelling geldt.

Voor elk punt B geldt dus, daar $\sum \underline{\rho} \times m \underline{\dot{\rho}}$ het impulsmoment ten opzichte van B voorstelt

$$\sum \underline{\rho} \times m \underline{\ddot{\rho}} = \sum \underline{\rho} \times m \underline{\ddot{r}},$$

waarin $\underline{r}$ nog steeds de plaatsvector is van een willekeurig punt van het stelsel ten opzichte van een punt O van de vaste ruimte, $\underline{\rho}$ ten opzichte van het punt B.

Nu is $\underline{r} = \underline{r}_B + \underline{\rho}$, dus $\underline{\ddot{r}} = \underline{\ddot{r}}_B + \underline{\ddot{\rho}}$,

dus wordt de voorwaarde voor de punten B:

$$\sum \underline{\rho} \times m \underline{\ddot{r}}_B = 0.$$

Of:

$$\underline{\ddot{r}}_B \times \sum m \underline{\rho} = M \underline{\ddot{r}}_B \times \underline{\rho}_Z = 0.$$

Hieraan kan op drie manieren voldaan worden:

$$1^\circ \quad \underline{\ddot{r}}_B = 0 \qquad 2^\circ \quad \underline{\rho}_Z = 0 \qquad 3^\circ \quad \underline{\ddot{r}}_B \text{ heeft de}$$

richting van $\underline{\rho}_Z$.

Het eerste zegt, dat elk punt, dat op het beschouwde ogenblik geen versnelling heeft, tot de punten B behoort. Het tweede, dat ook het zwaartepunt ertoe behoort. Het derde, dat elk punt er toe behoort, welks versnellingsvector door Z gaat.

We bepalen ons verder tot het geval, dat de punten een *onveranderlijk vlak stelsel* vormen, dat zich in zijn eigen vlak beweegt. Er is dan een tijdelijk versnellingscentrum D; het punt, dat zich daar bevindt, heeft geen versnelling en behoort dus tot de punten B.

Het zwaartepunt vonden we al als punt B. De derde mogelijkheid geeft: de versnellingsvector van B maakt een standvastige hoek (versnellingshoek) met BD, maar hij moet door Z gaan, dus maken BD en BZ een bepaalde hoek met elkaar. Dus:

De meetkundige plaats van de punten B voor een onveranderlijk vlak stelsel is een cirkelomtrek, die het lijnstuk, dat zwaartepunt en tijdelijk versnellingscentrum verbindt, als koorde heeft.

Opmerking. De beide gevonden cirkels hebben Z gemeen. Alleen in een zeer bijzonder geval vallen ze samen. In het algemeen hebben ze nog een tweede punt gemeen, dat dus, evenals Z, in zich verenigt de eigenschap van de punten A en die van de punten B.

OP DE RIBBEN VAN EEN GELIJKZIJDIGE DRIEVLAKS-
HOEK S DE PUNTEN P, Q EN R ZODANIG TE BEPALEN,
DAT $\triangle PQR$ GELIJKZIJDIG IS.

Als men dit vraagstuk in de klas aan de orde stelt, komt er al spoedig een leerling met de intuïtieve oplossing: maak $SP = SQ = SR$ (fig. 1). Dit antwoord ligt zó voor de hand en het bewijs van de juistheid is zó eenvoudig, dat er een verlammeende invloed op het denken van uitgaat, zodat op de vraag naar andere op-

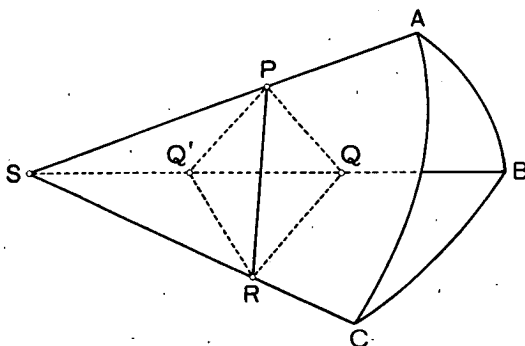


Fig. 1.

lossingen niet gereageerd wordt. De leraar is dan wel genooddaakt te wijzen op de mogelijkheid in één der zijden, b.v. BSC, een cirkel te beschrijven met R tot middelpunt en RQ tot straal, waardoor, indien de zijden van de drievlakshoek kleiner dan 60° zijn, een punt Q' op SB gevonden wordt, waarbij een tweede gelijkzijdige $\triangle PQ'R$ behoort.

De klas is nu rijp voor een gepast wantrouwen in intuïtieve oplossingen en reageert iets levendiger op de bewering: ook de tweede oplossing is niet meer dan een gelukkige vondst en kan best een bijzonder geval van een algemene oplossing zijn, want van de drie lijnstukken SP, SQ en SR zijn er ten minste twee aan elkaar gelijk. Zo komt men tot de vraag: bestaan er oplossingen, waarbij de drie lijnstukken verschillende lengten hebben? De leraar krijgt dan de gelegenheid te wijzen op de degelijkheid van de algebraïsche analyse.

Stel de zijden van de drievlakshoek α , die van $\triangle PQR$ a en

$SP = p$, $SQ = q$, $SR = r$, dan is:

$$a^2 = p^2 + q^2 - 2pq \cos \alpha = q^2 + r^2 - 2qr \cos \alpha = r^2 + p^2 - 2rp \cos \alpha,$$

waaruit volgt:

$$p^2 - r^2 = 2q \cos \alpha (p - r) \text{ en } p^2 - q^2 = 2r \cos \alpha (p - q). \quad \text{Dus:}$$

$$p = r \text{ (1) of } p + r = 2q \cos \alpha \text{ (2) en}$$

$$p = q \text{ (3) of } p + q = 2r \cos \alpha \text{ (4).}$$

$$(1) \text{ en (3) geven: } p = q = r.$$

$$(1) \text{ en (4) geven: } p = r \text{ en } q = p (2 \cos \alpha - 1).$$

$$(2) \text{ en (3) geven: } p = q \text{ en } r = p (2 \cos \alpha - 1).$$

$$(2) \text{ en (4) geven: } q - r = 2 \cos \alpha (r - q) \text{ dus, omdat } 2 \cos \alpha \neq -1, q = r \text{ en } p = q (2 \cos \alpha - 1).$$

Van de drie lijnstukken p , q en r moeten er dus twee aan elkaar gelijk zijn. Het derde kan aan die twee gelijk zijn, maar kan ook de waarde $p(2 \cos \alpha - 1)$ hebben, als p de lengte van de twee gelijke lijnstukken voorstelt en α de zijden van de drievlakshoek. Dit is in overeenstemming met de beide aangegeven constructies, want uit $\triangle QSR$ (fig. 2), waarin

$$SQ = SR = p \text{ en } RQ' = RQ, \text{ volgt:}$$

$$SQ' + SQ = 2ST$$

$$SQ' + p = 2p \cos \alpha, \quad SQ' = p(2 \cos \alpha - 1).$$

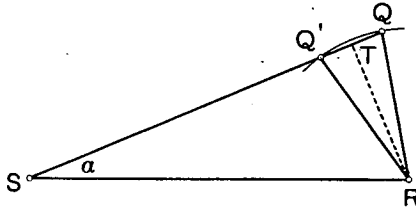


Fig. 2.

Ook blijkt, dat voor de mogelijkheid van de tweede oplossing geëist wordt: $2 \cos \alpha - 1 > 0$, $\cos \alpha > \frac{1}{2}$, dus $\alpha < 60^\circ$.

Er zijn dus geen andere oplossingen, dan de twee die aangegeven zijn. Door evenwijdige verplaatsing van het vlak kan men dit aantal natuurlijk onbeperkt doen toenemen.

Hoewel dit gebruik van de algebra bij de oplossing van meetkundige vraagstukken m.i. aangemoedigd moet worden, is toch de vraag naar een zuiver meetkundige behandeling begrijpelijk. Komt die vraag uit de klas en heeft men er de tijd voor, dan behoort men er ook op in te gaan, al zal het resultaat wel zijn, dat de leerlingen de verzuchting slaken: op dat idee zou ik nooit gekomen zijn. Hier volgt een meetkundige behandeling.

De driehoeken PSQ, QSR en RSP hebben één zijde a , de overstaande hoek α en twee aan twee één zijde gemeen.

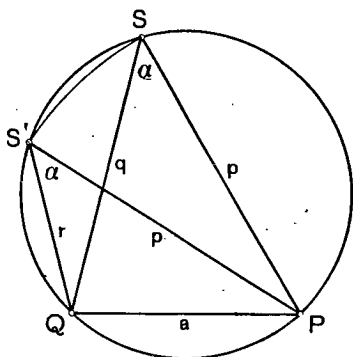


Fig. 3.

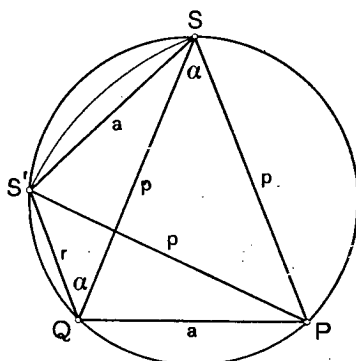


Fig. 4.

Beschouw het cirkelsegment op a , dat hoek α bevat. Men moet in dat segment drie driehoeken construeren met resp.: a, α, p, q ; a, α, q, r ; en a, α, r, p .

Neem punt S zó op de grote boog PQ aan, dat $bg\ PS > 2\alpha$, en construeer punt S' zó dat $PS' = PS$. Stel $PS = PS' = p$, $QS = q$ en $QS' = r$. Er ontstaan 3 driehoeken (fig. 3), waarvan 2 aan de gestelde voorwaarden voldoen, n.l.: $\triangle SPQ (a, \alpha, p, q)$ en $\triangle S'PQ (a, \alpha, p, r)$. $\triangle SQS'$ heeft de zijden q en r zodat voor de mogelijkheid van de oplossing geëist wordt dat $\angle SQS' = \alpha$, waardoor $SS' = a$ wordt. Het gevolg is, dat vierhoek PSS'Q een gelijkbenig trapezium moet zijn, zodat $q = p$ en S in het midden van de grote boog PQ moet liggen (fig. 4). De diagonalen van het gelijkbenige trapezium vormen met de evenwijdige zijden gelijkbenige driehoeken. Drukt men uit dat een diagonaal gelijk is aan de som der stukken waarin hij door de andere verdeeld wordt, dan vindt men:

$$p = \frac{r}{2 \cos \alpha} + \frac{p}{2 \cos \alpha}, \text{ waaruit volgt: } r = p (2 \cos \alpha - 1).$$

Is $\alpha = 60^\circ$ dan komt S' in Q en is $\alpha > 60^\circ$, dan komt S' op de kleine boog PQ te liggen, waaruit volgt dat in die gevallen de tweede oplossing niet bestaat.

Ten slotte kan men aan de meetkundige oplossing een stereometrisch tintje geven door uit te gaan van het netwerk van het viervlak SPQR en de drie congruente cirkelsegmenten beschouwen, die hoek α bevatten en op de zijden van $\triangle PQR$ beschreven worden, maar de oplossing wordt er niet eenvoudiger door.

P. VISSER.

OVER DE BEHANDELING VAN DE EXPONENTIËLE EN DE LOGARITHMISCHE FUNCTIE OP H.B.S. EN GYMNASIUM

door

Dr H. STREEFKERK.

Terwijl de exponentiële en logaritmische vergelijkingen langzamerhand naar het museum worden verwezen en op het nieuwe program van de H.B.S.-B zelfs officiëel geschrapt zijn, veroveren de exponentiële en logaritmische functies hoe langer hoe meer terrein. Het staatsexamen (voor toelating tot de Universiteiten) ging vóór; vanaf 1931 (sporadisch al er vóór) treden ze regelmatig in de examenopgaven op. Het eindexamen H.B.S. volgde (1938, 1943, eigenlijk al in 1932). Nu valt er aan deze functies eigenlijk maar één eigenschap op te merken: nl. dat ze monotoon zijn; ze verschillen dan dáárin, dat de exponentiële functie voor elke waarde van de onafhankelijk veranderlijke reëel is, maar dat ze niet alle waarden kan aannemen, terwijl de logaritmische functie wél alle waarden kan aannemen, doch niet voor elke waarde der onafhankelijk veranderlijke reëel is.

Het merkwaardige is nu, dat niemand er ooit aan schijnt te denken, deze, blijkbaar fundamentele, eigenschap te bewijzen. In de leerboeken wordt voor de monotonie steeds naar de grafiek verwezen; daar de grafiek met behulp van de logarimentafel vervaardigd wordt (opgemerkt zij dat dit niet noodzakelijk is), kan men met evenveel vrijmoedigheid de monotonie van de logaritmische functie ${}^{10}\log x$ uit de logarimentafel „bewijzen”, en die van ${}^e\log x$ daaruit afleiden. Ik heb dit dan doodleuk ook wel eens gedaan.

Het komt mij voor, dat het aan de orde stellen van de behandeling, speciaal van de logaritmische functie en van de daaruit voortvloeiende logaritmische ongelijkheden, later moet geschieden dan de eerste behandeling der logaritmen, zoals die gewoonlijk in de 3e klas van de H.B.S. plaats vindt; zelfs zou ik op de H.B.S. deze functies nog nà de infinitesimaalrekening willen stellen, en wel in het begin van klas 5. En dan is het publiek rijp genoeg, om de monotonie der bedoelde functies ook te bewijzen, althans voor het gebied der meetbare getallen. Niet met behulp

van de differentiaalrekening, omdat de functie e^x op de H.B.S. en het Gymnasium niet aan de orde komt, maar op een wijze, die ik nog nergens aangetroffen heb, en die ik hier uiteen wil zetten; de ervaring heeft mij geleerd, dat de methode voor de leerlingen volkomen begrijpelijk is.

Het doel is dus te bewijzen, dat de volgende stelsels gelijkwaardig zijn:

1. $a^x > a^y$ en $x > y$, als $a > 1$ is;
2. $a^x > a^y$ en $x < y$, als $0 < a < 1$ is;
3. ${}^a\log x > {}^a\log y$ en $x > y$, als $a > 1$ is ($x > 0$, $y > 0$);
4. ${}^a\log x > {}^a\log y$ en $x > y$, als $0 < a < 1$ is ($x > 0$, $y > 0$).

Ik beperk mij dus tot *meetbare* waarden van x en y .

A. *De exponentiele functie.*

Hulpstelling 1: *Als $a > 1$ en n een natuurlijk getal is, dan is $a^n > 1$.*

Bewijs: Zo mogelijk — als de klas dat gehad heeft — met volledige inductie. Anders eenvoudig als volgt: Vermenigvuldig beide leden van de ongelijkheid $a > 1$ met het — positieve! — getal a ; dat geeft:

$$a^2 > a; \text{ en } a > 1, \text{ dus } a^2 > 1.$$

Opnieuw vermenigvuldigen met a levert

$$a^3 > a; \text{ en } a > 1, \text{ dus } a^3 > 1; \text{ enz.}$$

Hulpstelling 2: *Als $0 < a < 1$ is en n een natuurlijk getal, dan is $0 < a^n < 1$.*

Bewijs: als boven.

Hulpstelling 3: *Als $a^n > 1$ is, $a > 0$ en n een natuurlijk getal, dan is $a > 1$.*

Bewijs: Uit $a < 1$ zou volgen $a^n < 1$ en uit $a = 1$ zou volgen $a^n = 1$.

Hulpstelling 4: *Als $0 < a^n < 1$ is en n een natuurlijk getal, dan is $a < 1$.*

Bewijs: als boven.

Hulpstelling 5: *Als $a > 1$ is, en p en q natuurlijke getallen zijn, dan is $a^{\frac{p}{q}} > 1$.*

Bewijs: Stel $a^{\frac{1}{q}} = b$. Uit $a > 1$ volgt dan: $b^q > 1$, dus $b > 1$ (hulpst. 3), dus $b^p > 1$ (hulpst. 1), dus $a^{\frac{p}{q}} > 1$. Deze hulpstelling is dezelfde als: *Als $a^{\frac{p}{q}} > 1$ is, en p en q natuurlijke getallen zijn, dan is $a > 1$.*

Hulpstelling 6: Als $0 < a^{\frac{p}{q}} < 1$ is, en p en q natuurlijke getallen zijn, dan is $0 < a < 1$, en omgekeerd.

Deze 6 hulpstellingen leveren, samengevat:

Stelling I. Als x een meetbaar positief getal is en $a > 0$, dan is
 $a^x > 1$ gelijkwaardig met $a > 1$
 en $0 < a^x < 1$ gelijkwaardig met $0 < a < 1$.

Bewijs: Elk meetbaar positief getal kan in de vorm $\frac{p}{q}$ geschreven worden, waarin p en q natuurlijke getallen zijn!

Stelling II. Als x en y meetbare getallen zijn, en $x > y$, dan is
 $a^x > a^y$ voor $a > 1$,
 $0 < a^x < a^y$ voor $0 < a < 1$.

Bewijs: Uit $x > y$ volgt $x - y > 0$, waarbij $x - y$ meetbaar is. Volgens st. I is dan

$$a^{x-y} > 1 \text{ voor } a > 1 \dots (1)$$

$$0 < a^{x-y} < 1 \text{ voor } 0 < a < 1 \dots (2)$$

Uit (1) volgt, daar a^y positief is:

$$a^{x-y} \cdot a^y > a^y \text{ of } a^x > a^y.$$

Uit (2) volgt desgelijks:

$$0 < a^x < a^y.$$

Stelling III. Als x en y meetbare getallen zijn, en $a^x > a^y$ dan is
 $x > y$ voor $a > 1$
 $x < y$ voor $0 < a < 1$.

Bewijs: uit het ongerijmde.

De stellingen II en III onderstellen niet meer, dat x en y positief zijn; slechts $x > y$ is vereist!

B. De logaritmische functie.

Stelling IV. Als ${}^a\log x > {}^a\log y$ is, dan is $x > y > 0$, indien $a > 1$ is, maar $0 < x < y$, indien $0 < a < 1$ is.

Bewijs: Stelt men ${}^a\log x = p$ en ${}^a\log y = q$, dan volgt uit het gegeven: $p > q$. Volgens stelling II is dan

$$a^p > a^q, \text{ als } a > 1 \text{ is,}$$

$$a^p < a^q, \text{ als } 0 < a < 1 \text{ is;}$$

maar $a^p = x$ en $a^q = y$, waarmee het gestelde bewezen is.

Stelling V. Als $x > y > 0$ is, dan is

$${}^a\log x > {}^a\log y, \text{ als } a > 1 \text{ is,}$$

$${}^a\log x < {}^a\log y, \text{ als } 0 < a < 1 \text{ is.}$$

Bewijs: als bij st. IV in omgekeerde volgorde.

Door de stellingen II—V is de monotonie vastgelegd.

Men gaat nu de grafieken tekenen ter illustratie, en bekijkt nog het verloop van de grafiek naar rechts en naar links, benevens het asymptotisch karakter van de x -as bij de exponentiële, van de y -as bij de logaritmische functie. Het eindresultaat wordt vastgehamerd: *voor $a > 1$ zijn de functies a^x en ${}^a\log x$ monotoon stijgend; voor positieve $a < 1$ zijn ze monotoon dalend.*

C. Onmeetbare argumenten.

Als de grafiek op het bord staat, is de tijd rijp om naar $2^{\sqrt{3}}$ te vragen. Men kan de monotonie-stelling natuurlijk voor onmeetbare x niet meer exact gaan bewijzen, maar men kan toch ook hier enigszins begrippen-vormend te werk gaan (men vormt immers geen begrippen, door er een exacte definitie van te geven!). Vooral, als men het onderhavige onderwerp pas in de 5e klas aan de orde stelt (zie de aanhef), is hier een welkome gelegenheid om de „uitbreiding van het getalbegrip” te beoefenen. Ik vraag dan eerst naar de betekenis van $2^{\sqrt{3}}$. Onmiddellijk reageren de leerlingen, door voor te stellen: Stel $2^{\sqrt{3}}$ gelijk aan x en neem de logaritmie. Dit coupeer ik, door naar 2^3 te vragen; ik bedoel niet, te weten te komen, dat dit 8 is. Dan komt $2 \times 2 \times 2$ voor de dag. Nu 2^{-3} en $2^{1/3}$. Ook dat wordt gerepeteerd. Maar $2^{\sqrt{3}}$! Als de schare dan zijn gebrek aan kennis beseft en betreurt, wordt in arren moede $\sqrt{3}$ zelf aan de orde gesteld. Maar de definitie daarvan helpt ons hier ook al niet veel. Dan komt eindelijk de algorithmie voor de worteltrekking voor den dag: $\sqrt{3} = 1,73205 \dots$, waarna de beide getallenrijen

$$1,7 \text{ — } 1,73 \text{ — } 1,732 \text{ — } 1,7320 \text{ — } 1,73205 \dots$$

$$1,8 \text{ — } 1,74 \text{ — } 1,733 \text{ — } 1,7321 \text{ — } 1,73206 \dots$$

worden opgeschreven: ze hebben beide dezelfde limiet: $\sqrt{3}$.

Nu verschijnen de volgende getallenrijen

$$2^{1,7} \text{ — } 2^{1,73} \text{ — } 2^{1,732} \text{ — } 2^{1,7320} \text{ — } 2^{1,73205} \text{ — } \dots$$

$$2^{1,8} \text{ — } 2^{1,74} \text{ — } 2^{1,733} \text{ — } 2^{1,7321} \text{ — } 2^{1,73206} \text{ — } \dots$$

Beide rijen bevatten slechts meetbare exponenten; de eerste rij stijgt dus monotoon, de tweede daalt monotoon. Hebben ze ook dezelfde limiet? ¹⁾

Ik geef dan eerst de schare nog gelegenheid, om zich te vergelopperen; wat is het verschil van de 5e getallen der beide rijen?

¹⁾ Dat beide rijen een limiet bezitten, wordt zonder bewijs aanvaard.

Het antwoord is prompt $2^{0.00001}$; nadat zich een diepe verslagenheid van mij heeft meester gemaakt, ontdekken we eendrachtig, dat dit niet het verschil, maar het quotient is. Dan gaan we maar op het quotient over; maar wat is $2^{0.00001}$? Hier helpt de grafiek met de monotonie: $2^{0.00001}$ is een kriezeltje groter dan 2^0 , dus dan 1. Zo langzamerhand komt de gemeenschappelijke limiet der beide getallenrijen in het zicht, die blijkbaar groter is, dan alle getallen van de 1e rij, en kleiner dan die van de 2e (beide rijen zijn immers monotoon). Natuurlijk is het zeer leerzaam, nu toch ook nog eens het *verschil* van de 5e getallen der beide rijen te beschouwen.

Is de klas erg pienter, dan kan men laten zien: als $x < \sqrt{3} < y$ is, dan is $2^x < 2^{\sqrt{3}} < 2^y$, waarbij men de positie van x en y beschouwt ten opzichte van de beide getallenrijen, die $\sqrt{3}$ bepalen.

Intussen is, voor de klas, de monotonie van 2^x ook voor onmeetbare waarden van x , gewaarborgd.

D. Toepassingen.

Men elimineert nu zoveel mogelijk het gebruik van de eigenschap

$${}^n\log a = {}^n\log a : {}^n\log b.$$

Ter toelichting een (niet eenvoudig) voorbeeld.

Voorbeeld: Voor welke waarden van x is

$${}^{x-5}\log (x-2) > -1?$$

Oplossing: $-1 = {}^{x-5}\log (x-5)^{-1}$, dus geëist wordt:

$${}^{x-5}\log (x-2) > {}^{x-5}\log \frac{1}{x-5}.$$

1e geval. $x-5 > 1$; dan moet $x-2 > \frac{1}{x-5} > 0$ zijn.

2e geval. $0 < x-5 < 1$; dan moet $0 < x-2 < \frac{1}{x-5}$ zijn.

De rest volgt nu vanzelf.

OVERPEINZINGEN NAAR AANLEIDING VAN DE ENQUÊTE VAN Dr L. N. H. BUNT

door

Dr H. STREEFKERK.

Het Paedagogisch Instituut der Rijksuniversiteit te Utrecht heeft bij de firma Wolters een belangrijke publicatie het licht doen zien, getiteld „De leerstof van ons Wiskunde-onderwijs. Een onderzoek naar de opvattingen en gebruiken dienaangaande”.

Zij bevat een uitvoerig verslag van de in October 1948 door Dr Bunt, conservator aan bovengenoemd instituut, ingestelde enquête, gevolgd door conclusies en slotopmerkingen. De enquête is welbekend, de vragenlijsten zijn aan alle wiskundeleraars, die in het jaarboekje 1948 van de Raad van Leraren voorkwamen, toegezonden. De lijst bevatte 256 onderwerpen uit de schoolwiskunde, en de leraar moest bij elk onderwerp aangeven of hij de behandeling ervan (a) *wenselijk en mogelijk*, (b) *wenselijk, maar slechts ten dele mogelijk*, (c) *wenselijk, maar onmogelijk*, of (d) *ongewenst*, achtte; en verder, of het onderwerp in de laatste 15 jaar (p) *minstens enige keren met succes*, (q) *wel eens*, of (r) *niet* in de klas door hem werd behandeld.

De enquête bedoelt een begin te maken met een wetenschappelijk gefundeerd onderzoek naar de overlading, waarvan het M.O. beschuldigd wordt, en dan in het bijzonder naar de overlading van het wiskundeprogramma. De enquête is dan ook onmiddellijk gevolgd door een systematisch onderzoek naar het aantal lessen, dat voor een bepaald onderwerp van het programma nodig is, welk onderzoek zich over jaren zal moeten uitstrekken, en dat verricht wordt door het „Centrum voor Didactiek”, een groep didactisch geïnteresseerde leraren, die hun medewerking aan het Paed. Inst. te Utrecht verlenen.

Intussen meent Dr Bunt uit de enquête reeds de conclusie te mogen trekken, dat de diagnose ontwijfelbaar is: *ernstige overlading van het wiskunde-programma* (blz. 74, cursivering van Dr B.). Is deze conclusie *als conclusie uit deze enquête* juist? (Dat ik het met de conclusie op zich zelf eens ben, heb ik in Euclides, 21e jg, blz. 31—40 reeds betoogd). Dr D. N. van der Neut, die de

enquête in „Chr. Gymn. en Middelb. Onderwijs” van 21 Jan. 1950 bespreekt, noemt „deze conclusie binnen de grenzen van het onderzoek aanvaardbaar”.

Daarentegen merkt Dr Joh. H. Wansink in zijn artikel „Een opinie-onderzoek inzake ons wiskundeonderwijs” in het „Weekblad voor Gymn. en Middelb. Onderwijs” van 9 Nov. 1949 op: „m.i. had de auteur hier hoogstens mogen spreken van een *ernstig, permanent gevaar van overlading bij de onder docenten gangbare interpretatie van school- en eindexamenprogramma* (cursivering van Dr W.)”. De zaak is belangrijk genoeg, om ei eens nader op in te gaan.

Waarop grondt Dr Bunt zijn conclusie? De enquête betrof 256 onderwerpen. Hiervan werden, om het gezamenlijk oordeel van Gymn.- en H.B.S.-leraren te kunnen vormen, de onderwerpen over Beschrijvende en Analytische Meetkunde afgetrokken; er bleven 227 onderwerpen over uit de Rekenkunde, de Algebra, de Vlakke Meetkunde, de Goniometrie en de Stereometrie. Hierbij waren 125 onderwerpen, waarvan door meer dan 60 % van de Gymn.-, zowel als van de H.B.S.-leraren verklaard werd, dat behandeling ervan wenselijk was. Van 29 dezer onderwerpen werd echter door meer dan $\frac{1}{5}$ deel der inzenders verklaard, dat de behandeling of slechts zeer ten dele, of in 't geheel niet mogelijk was. Neemt men bij bepaalde onderwerpen een steekproef, dan doet deze tijdnood zich nog erger voelen. Wat zegt men bijv. van een onderwerp, waarbij 97 % der Gymnasiale inzenders verklaart, dat behandeling wenselijk is, terwijl 61 % verklaart, dat behandeling of slechts zeer ten dele, of niet mogelijk is?

Bij een ander onderwerp zijn deze percentages resp. 75 % en 39 % voor de Gymn.-leraren en 66 % resp. 37 % voor de H.B.S.-leraren.

Inderdaad ligt de conclusie van overlading voor het grijpen. Maar laten we, gewaarschuwd door Dr Wansink, niet te snel grijpen.

Welke waarde bezitten de getallen dezer enquête? Waarom verklaart een leraar de behandeling van een onderwerp voor wenselijk? Waarom vindt 80 % van de Gymn. leraren en slechts 57 % der H.B.S. leraren het wenselijk de grafiek van de functie $\frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$ te behandelen? Dr Bunt merkt zelf bij dit onderwerp op: Zou de grotere belangstelling van het gymnasium hier veroorzaakt worden door traditie?

Waarom vindt slechts 44 % der Gymn. leraren, maar 71 % der H.B.S. leraren de behandeling van de prismoïde wenselijk?

De H.B.S. leraren zijn ongetwijfeld het desbetreffend eindexamen-vraagstuk nog niet vergeten!

Blijkbaar wordt de wenselijkheid nogal eens bepaald door traditie of door de vrees voor het eindexamen; niemand kan echter zeggen in hoeverre.

Ten einde de opmerking van Dr W. nader te bezien, heb ik de moeite genomen eens enige onderwerpen uit te zoeken, waarvan meer dan 50 % der (meedoende) docenten zowel de wenselijkheid als de mogelijkheid stellen, en die te toetsen aan de volgende twee normen:

1. vereist door het algemene leerplan van 1937 en/of het eind-examenprogramma van 1929;

2. vereist voor een goede wiskundige vorming van de jeugd.

Hierbij worden natuurlijk ook de in de programma's niet genoemde onderwerpen, die nodig zijn als voorbereiding van wel genoemde onderwerpen, als vereist beschouwd.

Ik moge den lezer de volgende lijst aanbieden, waarbij alléén onderwerpen genoemd zijn, die nòch door één der programma's vereist worden, noch voor wiskundige vorming strikt noodzakelijk zijn, het al te menselijke woord „wenselijk” blijft dus nu achterwege.

Achter de onderwerpen treft men het percentage leraren aan, dat behandeling wenselijk en mogelijk acht (G voor Gymnasium-leraren, H voor leraren-H.B.S.):

(121) het vijfde congruentiegeval (niet rechthoekig):	G 89, H 86.
(133) formule voor de deellijn	: G 52, H 74.
(134) stelling van Stewart	: G 53, H 80.
(141) verdeling in uiterste en middelste reden	: G 71, H 76.
(145) stelling van Ptolemaeus	: G 67, H 74.
(147) raaklijnen vierhoeken	: G 98, H 96.
(149) form. voor de zijde van de regelm. 5- of 10-hoek:	G 68, H 73.
(150) verdubbelingsformule	: G 49, H 53.
(162) secans en cosecans	: G 73, H 69.
(168) tangensregel	: G 83, H 90.
(177) formules voor de stralen van de aangeschreven	
cirkels (driehoeksmeting)	: G 68, H 80.
(201) prismoïde	: G 44, H 71.

Het is maar een greep. De lijst is uit te breiden, vooral als we ons geheel losmaken van een enkel ongelukkig uitgevallen eindexamen-vraagstuk. Het staat wel vast, dat, als geen enkele docent meer

bijv. het interpoleren bij meetkundige reeksen onderwees of wenselijk achtte te onderwijzen, ook de eindexamenopgaven dat onderwerp niet meer zouden bevatten. Nu meent 95 % der Gymn. leraren (84 % voor de H.B.S.), dat het onderwerp wenselijk is!

Ik wil nu eens de volgende percentages naast elkaar stellen.

Het onderwerp „eenvoudige inleiding tot de differentiaalrekening” wordt door 100 % van de Gymn. leraren wenselijk geacht, doch door 42 % geheel of gedeeltelijk onmogelijk (voor de H.B.S. zijn deze percentages resp. 91 % en 32 %; blijkbaar is hier 9 % van onmogelijk op ongewenst overgestapt).

Daarnaast acht 67 % of meer der Gymn. leraren (voor de H.B.S. 73 % of meer) het complex: verdeling in uiterste en middelste redenen, stelling van Ptolemaeus, formules voor a_5 en a_{10} wenselijk en mogelijk. Daaruit volgt, dat minstens

$$(67 + 42 - 100 =) 9 \% (5 \%)$$

der leraren het belangrijker vindt, hun tijd aan *niet* door het program geëiste onderwerpen te besteden, dan aan de *wel* door het program geëiste inleiding tot de differentiaalrekening.

Het schijnt wel een feit te zijn, dat de betekenis van de mogelijkheden, die in het programma van 1937 voor de H.B.S. verscholen liggen, aan het lerarencorps voor een groot deel ontgaat.

Nu moet echter onder de ogen gezien worden, of de behandeling van die onderwerpen, die nu door een groot percentage leraren wenselijk, maar geheel of gedeeltelijk onmogelijk worden genoemd, zou kunnen worden gewaarborgd door weglating van die onderwerpen, die nu door een groot percentage leraren wenselijk en mogelijk worden geacht en dus behandeld worden, maar die volgens de boven door mij gestelde normen zouden kunnen worden wegge laten, indien men deze normen rigoureuus zou toepassen. Ik kom dan tot de conclusie, dat de door deze weglating vrijkomende tijd toch niet voldoende is voor de behandeling van de „gewenste, maar vrijwel onmogelijke” onderwerpen. In mijn bovengenoemd voorbeeld wegen bijv. de drie weg te laten onderwerpen niet op tegen het ene in te voeren onderwerp. Niettemin ben ik overtuigd, dat uit de enquête van Dr Bunt blijkt, dat vele leraren hun waardering t. a. v. de wenselijkheid van een onderwerp te veel door de traditie hebben laten bepalen, en te weinig gelet hebben op de wenselijkheid van andere, niet traditionele onderwerpen. Daaruit is ook verklaarbaar, dat Dr Van der Neut de conclusie van overlading zonder critiek aanvaardt; hij behoort, blijkens zijn recensie, tot degenen, die zich ergert aan hen, die de behandeling van het

interpoleren bij reken- en meetkundige reeksen, het 5e congruentiegeval, de formules voor de merkwaardige lijnen van de driehoek en voor de stralen van de bij de driehoek behorende cirkels, de stellingen van Stewart en Ptolemaeus, de secans en de cosecans niet noodzakelijk achten. Aan de andere kant is het verklaarbaar, dat Dr Wansink meent, dat de schuld van de overlading niet bij het programma, maar bij de leraren ligt, die het programma verkeerd interpreteren, hij immers lonkt voortdurend naar het door Wimecos aanvaarde concept-eindexamenprogramma van 1948, dat een vrij belangrijke besnoeiing inhoudt van het leerprogramma van 1937; laatstgenoemd leerprogramma zou natuurlijk dienovereenkomstig besnoeid moeten worden. Mijn conclusie luidt: hoewel ik overtuigd ben, dat de leraren het in de hand hebben, de overlading te verminderen, blijft de conclusie van Dr Bunt in de huidige stand van zaken juist. In ieder geval is de enquête zeer leerzaam geweest.

Wat zou men denken van de volgende enquête. Men denke zich in, dat alle leraren ideaal-leraren waren, evengoed of nog beter dan men zelf is! Men denke zich verder in, dat het schriftelijk eindexamen alléén die onderwerpen bestreek, die men zelf mocht vaststellen. Men denke zich dan nog in, dat men de beschikbare tijd op de school zo mocht besteden, als men zelf goed achtte, en dat men volkomen op de hoogte zou zijn, van wat universiteit en maatschappij op 't ogenblik eisen; ja, dat men in staat ware zijn eigen voorkeur voor bepaalde lievelingsonderwerpen (negenpunts-cirkel e.d.) te overwinnen. Wat zou men dan behandelen, als volkomen vrijmachtig en alwijs opleider? Prismoïde, Ptolemaeus, secans, Stewart, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, interpolatie, vergelijkingen met 4 onbekenden (G 64, H 48!), $\frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$, ingewikkelde gebroken vormen? Heus? En géén eenvoudige samengestelde interest (G 15, H 17), géén infinitesimaalrekening?

Ik zal U een bekentenis doen. Ik zou de H.B.S. 6-jarig wensen voor hen, die naar vervolgonderwijs gaan, en ik zou willen behandelen: analytische meetkunde, beschrijvende meetkunde (wat minder techniek, en daarnaast ook illustratieve B.M. b.v. in scheve projectie), infinitesimaalrekening (beperkt!), zeer eenvoudige statistiek; ik zou rustig laten vallen: een zeer groot deel van de goniometrie, die nergens toe leidt; een deel van de vlakke meetkunde (als maar een systematisch, gesloten geheel overblijft); een groot deel van de vormen-algebra en van de cultus der vierkants-

vergelijkingen; maar ik zou iets van de samengestelde interest-rekening handhaven; de gebroken functies gingen overboord, behoudens de homografische functie; over $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ sprak ik alleen bij de logarithmische berekeningen. En het ergste komt nog: ik meen, dat dit mij, indien het Leerprogramma volgens het concept eindexamenprogramma 1948 zou mogen worden uitgelegd, bijna niet in strijd met de voorschriften zou brengen. Deze laatste zin moge de stof leveren ter overdenking door de geduldige lezer.

DE ZOMERCONFERENTIE VOOR WISKUNDE GEORGANISEERD DOOR HET MINISTERIE VAN ONDERWIJS.

Deze conferentie zal, onvoorziene omstandigheden voorbehouden, op 16, 17, 18 en 19 Augustus in het Zendingscentrum te Baarn worden gehouden. De bedoeling is, dat hier sprekers uit verschillende landen voordrachten zullen houden over het Wiskundeonderwijs op de Middelbare School in hun land. Tevens is hun gevraagd om, indien mogelijk, eindexamenopgaven mee te nemen. Uitgenodigd zijn o.a. sprekers uit Noorwegen, Denemarken, Engeland, België, Frankrijk en Zwitserland.

Zij, die aan deze conferentie wensen deel te nemen en zich nog niet opgegeven hebben, kunnen dit alsnog doen bij de Heer Ir. J. J. Tekelenburg, Bergselaan 13a, Rotterdam. De kosten zullen zeer laag zijn, daar voor dergelijke conferenties een begrotingspost aanwezig is. Het aantal deelnemers moet beperkt blijven in verband met de beschikbare huisvestingsmogelijkheden.

Het ligt in de bedoeling voor afwisseling te zorgen door o.a. een excursie te organiseren.

Erratum blz. 193 van deze jaargang.

Achter de titel van het werk van P. Bockstaele staat: „Niet in de handel”. Dit geldt natuurlijk alleen voor ex., die ter aankondiging en bespreking worden gezonden en voor auteursex. Het werk is wel in de handel en wordt aanbevolen aan hen, die studie maken van het intuïtisme.

Woensdag 16 Augustus

13.00 lunch
14.00 officiële opening der conferentie
14.30—15.30 lezing van Prof. Ir. F. M. Roeterink
15.30—15.45 thee
15.45—16.45 debat
18.00—19.00 diner
Des avonds gelegenheid tot nadere kennismaking.

Donderdag 17 Augustus

8.30 ontbijt
9.00—10.30 lezing van de Heer Kay Piene
10.30—10.45 koffie
10.45—12.00 debat
12.30—13.30 lunch
13.30—15.00 lezing van Dr. Erwin Voellmy
15.00—15.15 thee
15.15—16.45 debat
18.00—19.00 diner
20.00—21.00 lezing van Dr. G. Bosteels
Daarna debat.

Vrijdag 18 Augustus

8.30 ontbijt
9.00—10.30 lezing van de Heer W. J. Langford
10.30—10.45 koffie
10.45—12.00 debat
12.30—13.30 lunch
13.30 vertrek per autobus naar Amsterdam
14.30—15.45 boottocht door de grachten en haven van Amsterdam
15.45—16.45 wandeling in Amsterdam; eventueel thee in restaurant „Lido”
16.45 vertrek naar Baarn
18.00—19.00 diner
20.00—21.00 lezing van Dr. M. Pihl
Daarna debat.

Zaterdag 19 Augustus

8.30 ontbijt
9.00—10.30 lezing van de tweede Hollandse spreker
10.30—11.00 koffie
11.00 officiële sluiting der conferentie
12.30—13.30 lunch

Na de lunch vertrek der deelnemers.

Na het opmaken van bovenstaande agenda is nog bericht ontvangen van Prof. Jacquemart uit Parijs, dat hij ook komt, o.a. met wiskundefilms.

Namens het organisatiecomité,

Ir. J. J. Tekelenburg
Bergselaan 13a
Rotterdam.

Zomerconferentie voor Wiskunde

In overleg met het Ministerie van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen is thans de reeds eerder aangekondigde zomerconferentie voor wiskunde, mechanica en cosmografie definitief vastgesteld.

Bijzonderheden omtrent de kosten van deelneming aan, plaats, data en programma der conferentie volgen hieronder.

De conferentie zal worden gehouden van 16—19 Augustus 1950 in het Zendingscentrum te Baarn, Wilhelminalaan 3.

Als sprekers zijn de navolgende deskundigen uitgenodigd:

1. W. J. Langford M. Sc., Head of the Battersea Grammar School (Engeland);
2. Dr. G. Bosteels, studieprefect aan het Kon. Atheneum te Gent (België);
3. Kay Piene, inspecteur aan een Paedagogisch Seminar te Noorwegen;
4. Dr. Erwin Voellmy, voorzitter van de Vereniging van Zwitserse Gymnasia (Zwitserland);
5. Dr. M. Pihl, leraar wiskunde te Gentofte (Denemarken);
6. Prof. Ir. F. M. Roeterink, hoofd van de Technische Opleidingen bij Philips' Gloeilampenfabrieken N.V. (Nederland).

Het ligt in de bedoeling nog een tweede Nederlandse spreker uit te nodigen.

De sprekers zullen het Wiskunde onderwijs op de middelbare school in hun land behandelen, eventueel wenselijk geachte verbeteringen aangeven en door het verstrekken van eindexamenopgaven de controle op de behandelde leerstof demonstreren.

De kosten van deelneming zijn vastgesteld op / 10.— per persoon voor de gehele driedaagse conferentie. Aan hen, die willen deelnemen, wordt verzocht dit bedrag vóór 15 Juli a.s. te storten op girorekening no. 370303 ten name van J. Tekelenburg-de Reus, kantoor Rotterdam. Daar het Zendingscentrum een capaciteit van ruim 40 personen heeft, is, indien nog niet gedaan, spoedige aangifte noodzakelijk. Deze moet geschieden bij Ir J. J. Tekelenburg, Bergselaan 13a, Rotterdam, terwijl tegelijk bovengenoemde girostorting moet plaats vinden.

In verband met de officiële opening der conferentie door of namens de Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen, worden de deelnemers verzocht op Woensdag 16 Augustus vóór 12 uur des middags in het Zendingscentrum voornoemd (ongeveer 7 minuten lopen van het station Baarn) aanwezig te zijn.

Het voorlopig programma, zoals dat door de organisatoren, in samenwerking met het Ministerie van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen, is samengesteld, luidt als volgt:

BOEKBESPREKING.

Prof. Dr B. L. van der Waerden, *Ontwakende Wetenschap* — Egyptische, Babylonische en Griekse wiskunde. (Historische Bibliotheek voor de Exacte Wetenschappen, deel VII). P. Noordhoff N.V. Groningen, 1950. 332 blz., 120 fig., 40 platen, geb. f 13,50.

Wanneer men een boek van zeer nabij heeft zien groeien, wanneer men er dan een hele poos niets meer van heeft gehoord en zich weleens heeft afgevraagd, hoe lang het nog zou duren, wanneer dan op zekere dag de post een pakje brengt van de Uitgever en uit dat pakje een boek te voorschijn komt met de welbekende titel „Ontwakende Wetenschap”, wat ga je dan doen? Ik zou zeggen: je zet het in het rek neer, naast de andere delen van de Historische Bibliotheek. Want waarvoor zou je een boek open doen, dat je eigenlijk al kent. Ik heb niet aldus gehandeld, en dat is in eerste instantie een compliment voor uitgever, drukker, binder en tekenaar, die de Historische Bibliotheek in een nieuw gewaad hebben gestoken, gelukkig! En laat nu die oude kaften met hun weerzinwekkende kleur en hun afzichtelijke versieringen en de wazig corpulente lettertypen op dik vloeipapier tot het verleden behoren, als een helaas niet meer uit te wissen schandvlek op de Nederlandse typografische kunst. Alleen wat de keuze van het lettertype aangaat, zou ik nog een stapje verder willen gaan in de goede richting; het kan nog een tikje slanker, en het Nederlands met zijn (vooral in wetenschappelijke teksten) nog al lange woorden ziet er met de slankste letters het mooiste uit.

Ik ben mijn bespreking begonnen met wat iedereen het eerste opvalt, en wanneer ik op dit punt doorga, dan is het tweede, waar ik over moet spreken, de verzameling van liefst 40 platen, die onder het bladeren je aandacht trekken. Is dit misschien te veel van het goede? Wat heeft de Griekse vaas met een straattoneeltje, wat het Spartaans meisje uit het Vaticaan, wat Kroisos op de brandstapel, wat het mozaiek van de slag bij Issus te maken met ontwakende wetenschap? Het is moeilijk, om die vraag te beantwoorden, voor je het boek hebt gelezen, of ik zou moeten zeggen: ze hebben er evenveel mee te maken als de woorden akusmata, Amasis, Anthologia, bier, coulissen, Euergetes, Ezechias, Hagia Sophia, idee, Lykeion, Platonikos, stappentellers, Tarente, zielsverhuizing; woorden, die ik even uit het Register heb gepikt. De wetenschap ontwaakt niet op een leeg toneel. Ze is nauw verbonden met de mens en de beschaving. Prof. Van der Waerden heeft die band niet willen en niet kunnen verbreken, en dat bepaalt het bijzondere cachet van zijn boek.

Laat ik dit aan een, op zich zelf onbelangrijk, detail toelichten! Wie meent het feitenmateriaal van de Griekse wiskunde op zijn duimpje te kennen, bladere even bij Van der Waerden. Hij zal veel tegenkomen, wat volgens de citaten al lang bekend had moeten zijn, maar aan de aandacht der geschiedschrijvers is ontsnapt, omdat ze het niet naar waarde schatten. Mij heeft in dit opzicht vooral het verhaal (p. 115) getroffen van de tunnelbouw op Samos in —530, waarbij de werklieden over een afstand van 1 km rechtlijnig tegen elkaar inwerkten en elkaar in het midden

ontmoetten, op een fout na van slechts 10 m in horizontale en 3 m in verticale richting. Voor het beetje wiskunde, dat de antieke civiel-ingenieur hierbij nodig had, hoefde hij geen Euclides te kennen — bij Heroon vindt men dit probleem trouwens behandeld. Dat een knap ingenieur deze dingen beheerste, hoeft ons, naar wat we over de geschiedenis der Griekse wiskunde weten, evenmin te verbazen. Maar iets anders is wel belangrijk: wanneer men zich afvraagt, welke ambachten de ontwakende meetkunde konden stimuleren, zal men met het grootste gemak tien of twintig stimulantia opsommen, die allemaal uiterst waarschijnlijk zijn, zonder dat er ook maar één behoorlijke bewijspplaats voor te vinden is. Een tunnelbouw als voorbeeld lijkt wel ver gezocht. Maar veel beter dan een groot aantal vage voorbeelden geeft zulk een concreet feit achtergrond en relief aan de al te vaak gedachteloos herhaalde overlevering van Proklos, dat Pythagoras de wiskunde zou hebben herschapen tot een vorm van vrije opvoeding — een vrije kunst, zei men later, in tegenstelling tot de kunst van de ambachtsman — de beste kenschetsing, die er is voor de Griekse wiskunde met al haar deugden en gebreken.

Laat ik niet de indruk wekken, alsof heel het boek uit dergelijke verhalen bestaat, maar laat ik ook niet trachten de inhoud te resumeren. Wie er meer van wil weten, leze het boek! Hij zal diep onder de indruk komen, niet alleen van de Griekse wiskunde, maar evenzeer van de scherpzinnigheid der moderne onderzoekers (een zeer groot deel komt op rekening van de auteur zelf), die b.v. in Euclides' werk de naden en voegen hebben ontdekt en de brokstukken hebben geïsoleerd, waaruit ze heel wat Pythagorese wiskunde konden reconstrueren.

„Ontwakende Wetenschap” veronderstelt van de lezer niet veel, je HBS-wiskunde plus een gezond verstand (als je dat tenminste niet veel wilt noemen). Maar het is geen avondkout, geen verzameling van bakerpraatjes of phantastische hypotheses. Het is wetenschap, dus zware kost. D.w.z. iets wat je niet doorslikt (als b.v. pyramiden-zwandel), maar waar je werk van moet maken, als je er iets aan wilt hebben. Dat wordt je niet moeilijk gemaakt, want „Ontwakende Wetenschap” is geschreven door iemand, die zijn didactische bekwaamheden aan tal van leerboeken heeft beproefd. Ik zou zeggen: het is de lichtste zware kost, die ik ooit ben tegengekomen. Laat de lezers er éven echt van genieten als de referent, die er al in de keuken van gesnoept heeft.

FREUDENTHAL.

A. G. M. van Melsen, Van Atomos naar Atoom. De geschiedenis van het begrip Atoom. J. M. Meulenhoff, Amsterdam, 1949. 238 blz.

Dit nieuwe boek van Prof. van Melsen bestaat uit twee afdelingen, waarvan de eerste kan worden beschouwd als een nieuwe versie van zijn proefschrift over „Het wijsgerig verleden der atoomtheorie” (Amsterdam, 1941), terwijl de tweede de geschiedschrijving bevat van de ontwikkeling van het begrip atoom in de natuurwetenschap, nadat deze zich, in de nieuwere tijd, had losgemaakt van de haar in Oudheid en Middeleeuwen overschaduwend wijsgerige natuurbeschouwing; daarbij wordt, wij zouden het van deze schrijver ook niet anders verwachten, bijzondere aandacht geschonken aan de verhouding van de hedendaagse natuurwetenschap tot de natuurphilosophie en tot de wijsbegeerte in het algemeen.

Het boek behandelt een — in dubbele zin — moeilijk toegankelijke materie; het is boeiend en helder geschreven en zal, naar het me voorkomt, door ieder die belangstelt in de historische en wijsgerige achtergrond van de hedendaagse natuurwetenschap met aandacht en profijt worden gelezen. De aard van de behandelde

stof brengt mee, dat ten aanzien van sommige der behandelde problemen verschil van mening bezwaarlijk te vermijden is — de schrijver komt enkele malen terug op een onlangs door hem met Prof. Hooykaas gevoerde polemiek —, maar over het algemeen worden dergelijke omstreken vraagstukken terecht op de achtergrond gelaten. Ik moge niettemin de aandacht vragen voor een tweetal punten in van Melsen's betoog, die mij aanvechtbaar voorkomen.

Op blz. 39 schrijft hij aan Aristoteles' systeem een tweeslachtig karakter toe; het is volgens hem een wijsgerig systeem, maar met een natuurwenschappelijke inslag. Wanneer men zijn visie op de verhouding van wijsbegeerte en wetenschap aanvaardt, dan kan men het inderdaad moeilijk anders zien, maar het komt me voor dat hier, juist tengevolge van het streven in de natuurphilosophie vast te houden aan peripatetische leerstellingen en gezichtspunten, aan de genialiteit van de Stagiriet geenszins recht wordt gedaan. Deze heeft inderdaad zowel de algemene wetenschapsleer en de methodologie der natuurwetenschap, als de theoretische en de empirische natuurwetenschappen zelf, beoefend, maar hij heeft m.i. steeds de grenzen tussen deze verschillende disciplines scherp onderkend.

Op blz. 195 wordt de opvatting van het neo-positivisme als volgt gekenschetst. „Volgens deze is een materieel ding niets anders dan een logisch symbool. Daarmee wordt dit bedoeld: het woord „materieel ding” is in het taalgebruik aldus volgens de regels der taal vastgelegd, dat hierdoor in tijd en plaats nabije indrukken gebundeld worden. Iedere zin, waarin b.v. het woord „paard” voorkomt, kan worden vervangen door een andere zin, waarin het woord niet meer voorkomt, maar wel symbolen voor de indrukken, die we aan een paard toeschrijven.”

Ik ben ervan overtuigd, dat een neo-positivist in deze omschrijving niet alleen zijn eigen opvatting niet zal herkennen maar dat hij bovendien de geciteerde volzinnen stuk voor stuk of als onjuist, of als zinledig, of als triviaal, zal aanmerken (verg. R. Carnap, „Logische Syntax der Sprache”, Wien 1934, Ss. 225 ff.).)

De begaafde schrijver moge me deze opmerking ten goede houden. Zij diende om duidelijk te maken, dat hij vooralsnog niet diep genoeg is doorgedrongen in de positivistische tendenties in de hedendaagse wetenschapsleer, om dienaangaande de lezer met gezag te kunnen voorlichten. Maar op de beoordeling van zijn hier besproken boek kan dit tekort nauwelijks van invloed zijn.

E. W. BETH.

WIMECOS.

Oordeel over de Eindexamenvraagstukken van Wiskunde en Mechanica van 1950.

Ook dit jaar ontving het Bestuur gaarne een gefundeerd oordeel over de eindexamenvraagstukken van 1950. Indien de opmerkingen der leden hiertoe aanleiding geven, kunnen dan aan de autoriteiten bepaalde wensen worden doorgegeven.

De Secretaris van Wimecos:

Ir. J. J. TEKELENBURG, Bergse laan 13a, Rotterdam.

ACADEMISCHE OPLEIDING VOOR ACTUARIS.

In het Rapport van de Staatscommissie tot Reorganisatie van het Hoger Onderwijs wordt geadviseerd een aantal opleidingen, die tot nu toe buiten de universiteit plaats vonden, binnen het universitair verband te brengen. Daarbij wordt o.a. de opleiding tot actuaris genoemd. Inderdaad werd onder de actuarissen hier te lande reeds lang de behoefte aan een academische opleiding voor hun beroep gevoeld. De plannen tot het instellen van deze opleiding konden echter tengevolge van de oorlogsomstandigheden eerst na de bevrijding ten uitvoer worden gebracht.

Sedert de aanvang van het studiejaar 1948—1949 bestaat aan de Universiteit van Amsterdam de mogelijkheid een academische opleiding voor het beroep van actuaris te volgen.

Met welwillende medewerking van de Redactie kunnen hieronder omtrent deze opleiding de belangrijkste gegevens worden vermeld. In het bijzonder moge hiervoor de aandacht worden gevraagd van de leiders(sters) van scholen voor V.H.M.O. en van de leraren(essen) in de wiskunde in de hoogste klassen.

De Faculteit der Wis- en Natuurkunde der Universiteit van Amsterdam verklaarde zich bereid om aan een universitaire opleiding tot actuaris mede te werken door het instellen van een nieuw *doctoraal-examen met hoofdvak wiskunde en bijvakken actuariële wetenschappen en bedrijfshuishoudkunde*.

Door het Actuarieel Genootschap werd vervolgens op 30 Augustus 1948 in het leven geroepen de „Stichting voor Hoger Onderwijs in de Actuariële Wetenschappen”. Genoemde Stichting, waarvan het bestuur is samengesteld uit vertegenwoordigers van het Actuarieel Genootschap, de Bedrijfsgroep Levensverzekering, de Rijksfondsen, de Rijksverzekeringsbank en de particuliere pensioenfondsen — werd toegelaten tot het vestigen van een tweetal bijzondere leerstoelen aan genoemde Universiteit, te weten in de actuariële leer der sociale verzekering en in de actuariële leer der levensverzekering. Tot bijzondere hoogleraren werden met ingang van 1 September 1948 benoemd: respectievelijk Dr. C. Campagne, lid der Verzekeringskamer en Dr. J. Engelfriet, directeur van de Levensverzekering-Maatschappij „Arnhem”.

De grote belangstelling, welke uit vele kringen van wetenschap

en bedrijfsleven voor de oraties dezer hoogleraren werd betoond, bewees, dat de betekenis van het feit, dat hiermede de universitaire opleiding tot actuaris werkelijkheid was geworden, hoog werd aangeslagen en doet voor de toekomst der afgestudeerden het beste verwachten. En reeds is in het afgelopen studiejaar gebleken, dat de nieuwe opleiding zich ook van de zijde der studenten in een bevredigende belangstelling mag verheugen.

De studie voor actuaris kan worden aangevangen na het afleggen van een candidaatsexamen met hoofdvak wiskunde. Het is echter gewenst, dat studenten, die voornemens zijn de actuariële opleiding te gaan volgen, bij voorkeur reeds vóór het afleggen van het candidaatsexamen, de colleges over de levensverzekeringswiskunde volgen, welke door Prof. Van Haaften aan de Vrije Universiteit worden gegeven en bij deze hoogleraar een tentamen afleggen. Beoogde colleges kunnen door aan de Universiteit van Amsterdam ingeschreven studenten kosteloos worden gevolgd.

Candidaten, die het nieuw ingestelde doctoraal-examen met hoofdvak wiskunde en bijvakken actuariële wetenschappen en bedrijfshuishoudkunde wensen af te leggen, moeten voor het hoofdvak wiskunde de colleges *analyse* van Prof. Van der Corput, de colleges *waarschijnlijkheidsrekening* en *mathematische statistiek* van Prof. Van Dantzig en voorts de colleges over een in overleg met de betreffende docent te kiezen onderwerp volgen. Voor het bijvak bedrijfshuishoudkunde dienen de colleges van Prof. Van der Schroeff, Prof. Delfgaauw en A. Th. de Lange (lector) in de Faculteit der Economische Wetenschappen te worden gevolgd. De voor de verschillende af te leggen tentamens vereiste leerstof wordt in de loop van twee opeenvolgende studie jaren behandeld.

Het examenprogramma voor het hoofdvak wiskunde omvat in totaal de leerstof van 12 jaaruren, te weten: analyse (4 jaaruren), waarschijnlijkheidsberekening en mathematische statistiek (6 jaaruren, gekozen uit de 8 jaaruren omvattende colleges) en keuze-onderwerp (2 jaaruren). Onder jaaruren wordt verstaan één uur per week gedurende één studiejaar.

Voor het bijvak actuariële wetenschappen moeten 2 tentamens en voor het bijvak bedrijfshuishoudkunde 3 tentamens worden afgelegd. Elk dezer tentamens omvat de stof, die door één der docenten is behandeld op een tweejarig college van 2 uur per week. Voor het afleggen van een tentamen in de actuariële wetenschappen wordt bovendien verlangd, dat de kandidaten met goed gevolg hebben deelgenomen aan een *practicum* en dat zij gedurende drie maanden practisch hebben gewerkt op de wiskundige afdeling van

een levensverzekering-maatschappij, van een pensioenfonds, van de Rijksverzekeringsbank, of wel van een Rijksfonds. Voorts wordt nog vereist het afleggen van een tentamen boekhouden in de Economische Faculteit of het bezit van een daartoe door deze Faculteit erkend z.g. praktijk-diploma boekhouden.

Voor nadere gegevens betreffende te volgen colleges, aanbevolen boeken, alsmede voor de exameneisen, kan worden verwezen naar de Gids der Universiteit van Amsterdam voor het Studiejaar 1949—1950 (zie blz. 163, sub 36 en 37; blz. 172, 173 en 176; blz. 190 en 196).

De aanstaande actuaris moet zich tijdens zijn academische studie de grondbegrippen zijner wetenschap tot geestelijk eigendom maken, hetgeen slechts kan worden bereikt, indien hij (zij) zich ten volle aan deze studie geeft en zelf een oplossing tracht te vinden voor theoretische problemen en vraagstukken van praktische aard.

Doel van de studie moet niet alleen zijn het verzamelen van de nodige vakkennis, maar meer nog het verkrijgen van een goed inzicht in de grondbegrippen en in de wetenschappelijke methoden. Daarom bestudere de a.s. actuaris naast de dictaten de aanbevolen boeken, alsmede de belangrijkste publicaties in vaktijdschriften, om te trachten zich zoveel mogelijk een eigen oordeel te vormen.

Door deze studie wordt de basis gelegd, waarop later de meer zelfstandig werkende actuaris moet kunnen voortbouwen. Hij wordt al studerende getraind in het wetenschappelijk denken en zijn critische geest wordt er door gescherpt.

Het met gunstig gevolg afleggen van het nieuw ingestelde doctoraal-examen biedt vele mogelijkheden, welke zeker niet beperkt zijn tot het verkrijgen van een positie als actuaris bij een levensverzekering-maatschappij, pensioenfonds of soortgelijke instelling. Zowel de overheid als het bedrijfsleven hebben immers grote behoefte aan leidende persoonlijkheden met een hogere mathematisch-statistische en economische scholing. Voor degenen, die voldoende aanleg en karaktereigenschappen voor het bekleden van een dergelijke positie bezitten, zijn de vooruitzichten na volbrachte universitaire studie zeker niet ongunstig te noemen en zal het mogelijk zijn op de duur een goede betrekking te verwerven.

In vroeger jaren waren de perspectieven van de studenten in de wiskunde vrijwel uitsluitend beperkt tot het leraarsambt. Thans is zulks zeker niet meer het geval, voornamelijk tengevolge van de meer uitgebreide toepassing van de methoden der mathematische statistiek door verschillende grote bedrijven en overheidsinstellingen. Ook heeft de sterke groei van het levensverzekeringsbedrijf en

van verwante bedrijven, als pensioenfondsen, de vraag naar academisch opgeleide wiskundigen belangrijk doen toenemen.

Aan hem, die het nieuw ingestelde doctoraal-examen met goed gevolg heeft afgelegd, wordt onderwijsbevoegdheid in de *wiskunde* verleend. Het blijft dus mogelijk na afloop van de studie voor actuaaris het leraarsambt te kiezen, indien men zich daartoe geroepen mocht gevoelen. De langs deze weg opgeleide leraar heeft het voordeel, dat hij tijdens zijn studie grondig heeft kennis gemaakt met een uitgebreid gebied van toepassing der door hem te doceren wetenschap.

Ondergetekende verklaart zich gaarne bereid tot het verstrekken van alle gewenste inlichtingen, de studie voor actuaaris aan de Universiteit van Amsterdam betreffende.

Haarlem,
Oosterhoutlaan 9.

A. J. VAN DER LOO,
Referendaris bij de Verzekeringskamer.
Assistent aan de Universiteit van Amsterdam.

Inhoud van de 25e jaargang 1949/1950.

	Blz.
Officiële mededelingen van Wimecos	129, 359
Jaarvergadering L.I.W.E.N.A.G.E.L.	124
Mathematisch Centrum	37
Van de personen	189
Werkgroep W.V.O.	35, 172
Circulatie van tijdschriften	41
Sixième congrès international d'histoire des sciences	161
Jubileum Dr H. J. E. Beth, 70 jaar	237—300
De zomerconferentie voor wiskunde, georganiseerd door het Ministerie van Onderwijs	360
Dr U. PH. LELY, Aanschouwelijke figuren in de ruimte	1
P. WIJDENES, De evenwijdige lijnen in de schoolmeetkunde	22
Dr E. J. DIJKSTERHUIS, Proklos' Commentaar op Euclides I	43
Dr J. KOKSMA, Functies en grafieken	55
P. WIJDENES, Tennissen met baggerlaarzen aan	70
W. J. VOLLEWENS, Huldiging van Prof. SCHUH	95
Dr H. BUZEMAN, Enige Engelse eindexamenopgaven voor wiskunde, mechanica en natuurkunde	107
Dr JOH. H. WANSINK, De regel van Simpson	132
Prof. Dr O. BOTTEMA, Verscheidenheden:	
XXV. De momentenstelling	142
XXVI. Het vraagstuk van Malfatti	144
XXVII. De maanbaan	196
XXVIII. Een probleem van Euler	200

	Blz.
G. KROOSHOF, De eerste algebralessen.	164
Dr D. J. E. SCHREK, De constructie van Thomas Strobe . .	169
Dr P. MALLENDER, Eenvoud in de wiskunde	173
Prof. Dr D. VAN DANTZIG, Blaise Pascal.	203
Prof. Dr A. HEYTING, Spanningen in de wiskunde 233, vervolg	301

Jubileumnummer, gewijd aan Dr H. J. E. Beth.

P. WIJDENES	} 239, 240, 241
J. VAN ANDEL	
O. BOTTEMA	

Prof. Dr O. BOTTEMA, Over de kinematische afbeelding volgens Beth en haar toepassing op de centrale drijfstaangbeweging .	253
Prof. Dr H. BREMEKAMP, Over gebondenheid en vrijheid van de docent	257
Dr E. J. DIJSTERHUIS, Descartes, Pascal en de proef op de Puy-de-Dôme	265
Dr F. DE KOK, Numerieke integratie	271
Prof. Dr C. VISSER, Beginselen der goniometrie	274
C. DE WAARD, Wiskundige bijdragen tot de pansophie van Comenius	278
Prof. Dr W. VAN DER WOUDE, Over de constructie der pseudo-ellips	290
Prof. Dr E. W. BETH, De betekenis van het mathematisch grondslagenonderzoek voor het elementaire onderwijs in de wiskunde	294
Dr J. KOKSMA, Rondom het functiebegrip	313
P. VISSER, Op de ribben van een gelijkzijdige drievlakshoek S de punten P, Q en R zo te bepalen, dat $\triangle PQR$ gelijkzijdig is	343
A. J. VAN DER LOO, Academische opleiding voor actuaris . .	350
Dr H. STREEFKERK, Over de behandeling van de exponentiële en de logarithmische functies op H.B.S. en Gymnasium . . .	346
Dr H. STREEFKERK, Overpeinzingen naar aanleiding van de enquête van Dr L. N. H. BUNT	355

KORRELS.

XCIII. Mevr. Dr VAN DE VOOREN—VAN VEEN, Iets overkorrel XCIII (Jg. 24, blz. 256)	34
XCIV. J. BEUNK, Verweer tegen Turkstra en Geursen . . .	104
XCV. M. G. BEUMER, $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$	106
XCVI. e en π in veel decimalen	159
XCVII. Dr JOH. A. WANSINK, De regel van Simpson . . .	187
XCVIII. Dr L. KUIPERS, Een opmerking over een eigenschap van de functie $\cos x$	188
XCIX. S. J. GEURSEN, $\sin 2a$ en $\cos 2a$	190
C. Dr H. J. E. BETH, De omkering van de stelling van König en van die van het impulsmoment	340
Ingekomen boeken	101, 159
Boekbesprekingen	150, 191, 357
Portret van Prof. Dr J. RIDDER en van Dr H. J. E. Beth.	

Uitwerkingen van de logaritmenvraagstukken voor leraren,
die

- de Nieuwe Schoolalgebra (4 en 5 dec.)
- Algebraïsche vraagstukken (4 en 4 dec.)
- Beknopte Algebra

op hun school gebruiken, gratis en franco verkrijgbaar bij
P. WIJDENES

Verschenen:

P. WIJDENES

BOLDRIEHOEKSMETING

298 blz. 203 fig. 99 voorbeelden f 9,50, geb. f 11,50

Inhoud:

I. Inleiding; de bol en bolfiguren	1— 13
II. Rechthoekige driehoeken	14— 44
III. Scheehoekige driehoeken	45— 97
IV. De stellingen van Stewart, Menelaos en Ceva; de merkwaardige lijnen	98—119
V. De oppervlakte van een boldriehoek	120—128
VI. Om- en ingeschreven cirkel	135—158
VII. Herleiding van formules voor boldriehoeken tot formules voor vlakke driehoeken	159—168
VIII. Toepassingen van de boldriehoeksmeting op de stereometrie	169—176
IX. Toepassingen van de boldriehoeksmeting op de wiskundige aardrijkskunde en op de sterrenkunde	177—215
X. De stereografische projectie	216—226
Aantekeningen van A. J. H. Meertens De additamentenmethode en de methode van Legendre	227—236
Transformatieformules	237—244
Vraagstukken, formules, register enz.	
Antwoorden	265—292

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-DJAKARTA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel

TE KOOP AANGEBODEN:

Euclides, 25 jaargangen (alles wat tot nu toe is verschenen) in
afleveringen.

Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, 29 jaargangen n.l. jaarg. 7 t/m 36,
uitgezonderd jaargang 18. Hiervan 8 jaargangen met band.

Newcomb—Engelmann, Populäre Astronomie, 6e Aufl., in linnen band.
Alles in prima staat.

Opgave van bod onder letter M. aan firma P. Noordhoff, Groningen.

Dezer dagen verschijnt:

**INLEIDING TOT DE
DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAALREKENING**

met toepassingen op verschillende gebieden

door

Dr H. J. E. BETH

5e druk; f 13.50; geb. f 16,—

Verschenen:

P. WIJDENES

ALGEBRA

voor

MIDDELBARE HANDELSSCHOLEN

1e deel, Tiende druk

f 2,40

BEGINSELEN DER ANALYTISCHE MEETKUNDE

door

Dr D. J. E. SCHREK

10e druk

f 3,85; geb. f 4,60

Verschenen:

GRUNDZÜGE DER GALOISSCHEN THEORIE

von

N. TSCHEBOTARÖW

Uebersetzt und bearbeitet von H. Schwerdtfeger

f 17,50*, geb. f 20.—*

Verschenen:

J. G. RUTGERS

LEERBOEK DER BESCHRIJVENDE MEETKUNDE

Tweede deel - Projectie methoden

A. Scheve Parallelprojectie

B. Axonometrie

C. Centrale projectie

Eerste stuk f 5,25*

Verschenen:

P. WIJDENES

BOLDRIEHOEKSMETING

Tiende druk van J. Versluys

BOLDRIEHOEKSMETING

f 9,50, geb. f 11,50

UITGAVEN P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Ook verkrijgbaar door de boekhandel.